

TRES PROBLEMAS EN HOMENAJE A J. KEPLER Y C. F. GAUSS (😊)*

POR FERNANDO DE LA CUEVA LANDA

Tras la pandemia de la enfermedad COVID19, habrá que mantener una determinada "distancia social" de seguridad entre las personas.

(Sugerencia: para los dos primeros problemas que se plantean a continuación, puede ser útil emplear el habitual papel de cuadrícula 0,4 cm y representar lo que haga falta a escala $e = 1 : 250$)

Problema nº 1

Supongamos que marcamos con puntos la ubicación de los alumnos en una clase, que la distancia que hay que respetar entre unos y otros es $d = 2\text{ m}$ y que el espacio disponible para colocar a los estudiantes en un aula determinada es un rectángulo de dimensiones $a = 11\text{ m}$ y $b = 9\text{ m}$.

A) ¿Cuánta gente cabría colocándola en filas y columnas perpendiculares? ("Gente" serán "puntos en el plano")

(En estas soluciones entenderé por $E(x)$ = la parte entera del $n^\circ x$; por ejemplo $E(3,2) = 3$, $E(9,7) = 9$, $E(5) = 5$, etc.)

► $9 : 2 = 4,5$ luego un segmento de 2 m cabe 4,5 veces en el lado de 9 m.; $E(4,5) = 4$

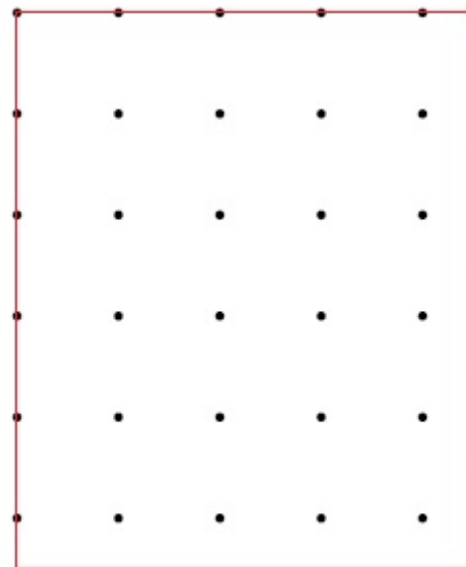
Esto significa que se pueden poner $E(4,5) + 1 = 4 + 1 = 5$ columnas de puntos.

► $11 : 2 = 5,5$ luego un segmento de 2 m cabe 5,5 veces en el lado de 11 m.; $E(5,5) = 5$

Esto significa que se pueden poner $E(5,5) + 1 = 5 + 1 = 6$ filas de puntos

Es decir, cabrían: $(n^\circ \text{ de filas}) \cdot (n^\circ \text{ de columnas}) = 6 \cdot 5 = 30$ alumnos

Ciñéndonos al vértice superior izquierdo del rectángulo, esta trama de puntos colocados en los vértices de cuadrados sería un resultado válido:

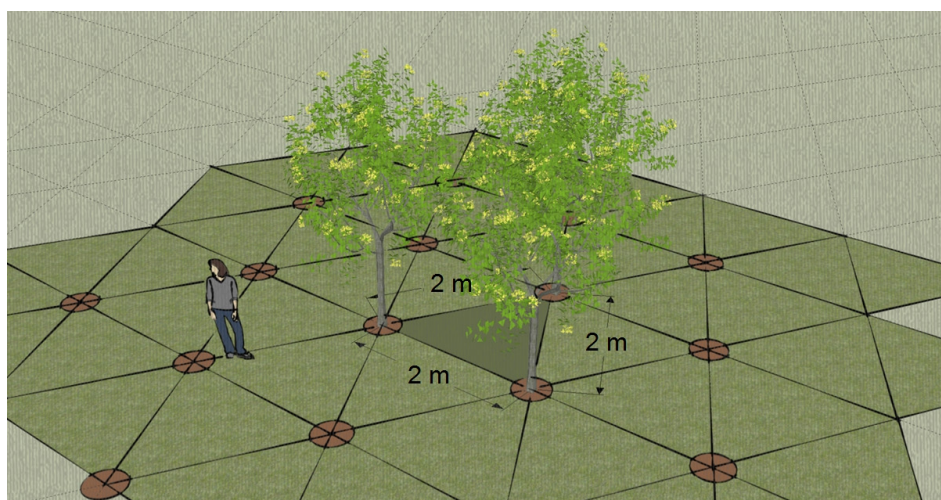


B) ¿Cómo se podría ubicar a 31 alumnos en esa aula? (Parece imposible, pero echándole imaginación y saliéndose del tradicional esquema de filas y columnas ...)

Hay múltiples maneras de hacerlo, pero una que se emplea con frecuencia [en agricultura](https://es.wikipedia.org/wiki/Al_tresbolillo), es la llamada **distribución al tresbolillo**¹ (o siembra al tresbolillo)

Consiste en colocar los puntos en los vértices de una trama² de triángulos equiláteros (de lado 2 m en este caso concreto, por ser 2 m la distancia mínima que se exige entre unos puntos y otros).

La idea sería ésta:



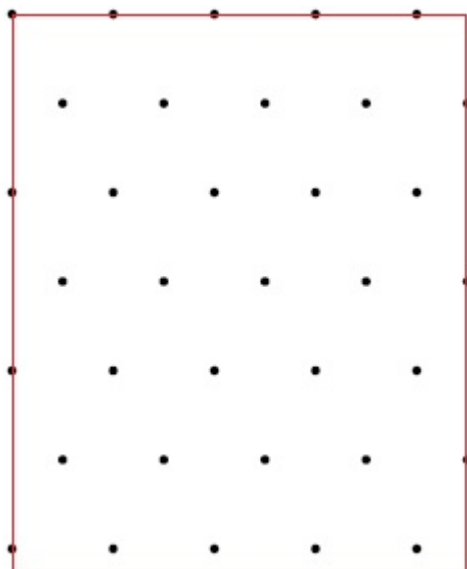
¹ https://es.wikipedia.org/wiki/Al_tresbolillo

² Vuelve a ser necesario pensar en tramas de puntos. Esta página en la Web nos permite diseñar tramas a medida:

Tramas: <https://incompetech.com/graphpaper/>

Trama cuadrada: <https://incompetech.com/graphpaper/squaredots/>

Trama triangular equilátera: <https://incompetech.com/graphpaper/triangledots/>



Los lados de los triángulos equiláteros que aparecen miden 2 m.

En ellos, por el Teorema de Pitágoras, se puede deducir que la altura h mide $\sqrt{3}$ m ($\sim 1,73... \text{ m}$)

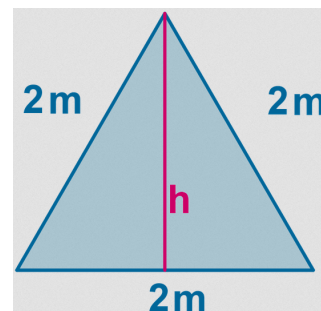
Es decir, con la trama al tresbolillo nuestras filas están separadas $\sim 1,73 \text{ m}$, en lugar de 2 m.

► $9 : 2 = 4,5$ luego un segmento de 2 m cabe 4,5 veces en el lado de 9 m.; $E(4,5) = 4$

Cada fila IMPAR contendrá $4 + 1 = 5$ puntos, como en la trama cuadrada.

También en cada fila PAR hay 5 puntos, pues el cociente $9 : 2 = 4,5$ ($9 = 2 \cdot 4 + 1$) permite asegurar que en ellas cabe el último punto, ya que las filas pares están desplazadas 1 m hacia la derecha con respecto a las impares.

► $11 : \sqrt{3} \approx 6,4$ luego un segmento de $\sqrt{3}$ m cabe entero 6 veces en el lado de 9 m.; $E(11 : \sqrt{3}) = 6$



Esto significa que se pueden poner $6 + 1 = 7$ filas

Por consiguiente cabrían: $(n^\circ \text{ de filas}) \cdot (n^\circ \text{ de puntos en cada fila}) = 7 \cdot 5 = 35$ puntos

En conclusión, **caben sobradamente 31 alumnos.**

C) Manteniendo la "distancia social" de 2 m, ¿cuál crees que es el aforo máximo de esa aula? ¿Cómo crees que se alcanza?

Si giramos 90° y disponemos la trama al tresbolillo de esta otra manera, se gana una plaza.

► $9 : 2\sqrt{3} \approx 2,6$ luego un segmento de 2 m cabe $\sim 2,6$ veces en el lado de 9 m.; $E(9 : 2\sqrt{3}) = 2$

Cada fila IMPAR contendrá $2 + 1 = 3$ puntos.

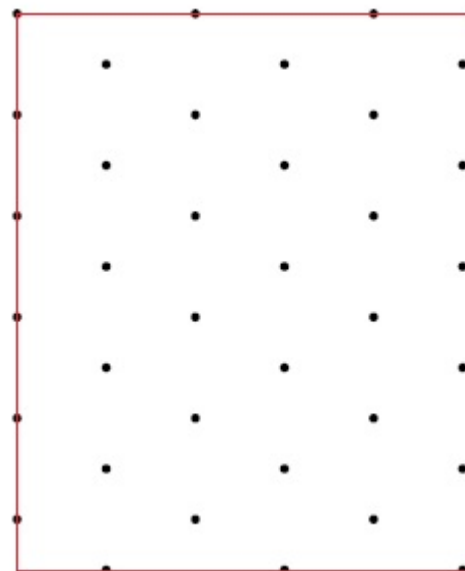
También en las filas pares hay 3 puntos, pues el cociente $9 : \sqrt{3} \approx 5,2$, con $E(9 : \sqrt{3}) = 5$, permite asegurar que en ellas cabe también el tercer punto, ya que las filas pares están desplazadas $\sqrt{3}$ m hacia la derecha con respecto a las impares.

En resumen, todas las filas tendrán 3 puntos, sean impares o pares.

► Con esta distribución, la separación entre filas es ahora de 1 m, luego tendremos $11 + 1 = 12$ filas

Por consiguiente cabrán:

$(n^\circ \text{ de filas}) \cdot (n^\circ \text{ de puntos en cada fila}) = 12 \cdot 3 = 36$ puntos, que creo que es el aforo máximo del aula.



D) Considerándolas como puntos que están separados unos de otros a una distancia de al menos 2 m, ¿a cuántas personas se puede meter en una habitación cuadrada de lado 1,95 m?

A tres personas. La explicación en el siguiente apartado.

E) ¿Qué lado tiene el cuadrado más pequeño en el que podemos poner tres puntos que disten 2 m unos de otros?

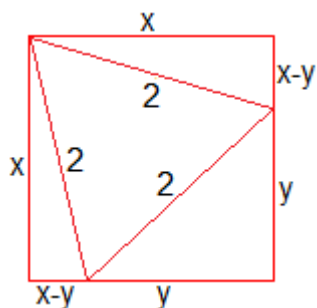
En otras palabras, si inscribimos un triángulo equilátero de lado 2 m en un cuadrado, ¿cuánto mide el lado de este último?

Vamos a dibujar la figura, que presenta una clara simetría.

Llamaremos x a la medida del lado del cuadrado, que pretendemos averiguar.

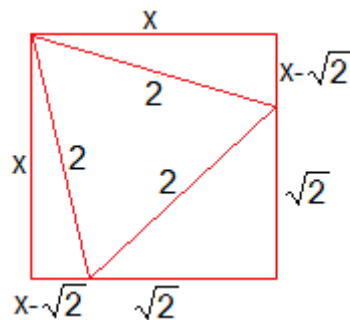
Llamaremos y a la medida de los catetos del triángulo rectángulo isósceles que se forma en la figura.

Los catetos pequeños de los otros dos triángulos rectángulos escalenos que se forman medirán por tanto $x-y$.



Si aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 2 y catetos y obtenemos que $y = \sqrt{2}$

Ahora la figura pasa a tener una sola incógnita, quedando así:



Volvemos a aplicar el teorema de Pitágoras, esta vez en uno cualquiera de los dos triángulos rectángulos escalenos :

$$x^2 + (x - \sqrt{2})^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 2\sqrt{2}x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0 \Rightarrow$$

... se resuelve la ecuación de 2º grado y se obtienen dos soluciones...

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

, Una de las dos se desecha por ser negativa, ya que ha de cumplirse que $x > 0$...

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \approx 1,93185165... \text{ m}$ es la medida del lado del menor cuadrado en el que podemos inscribir un triángulo equilátero de 2 m de lado, luego en el cuadrado de lado 1,95 m del apartado D) caben perfectamente 3 personas.

=====

Problema nº 2

Se va a celebrar un examen masivo dentro de un polideportivo y hay que mantener una distancia de **2 m** entre los participantes. Se dispone de un espacio **cuadrado de 47,5 m** de lado.

A) ¿Cuánta gente cabría colocándola en filas y columnas perpendiculares?

► $47,5 : 2 = 23,75$ luego un segmento de 2 m cabe 23 veces en el lado de 47,5 m.; $E(23,75) = 23$

Esto significa que se pueden poner

$E(23,75) + 1 = 23 + 1 = \underline{24 \text{ columnas de puntos}}$

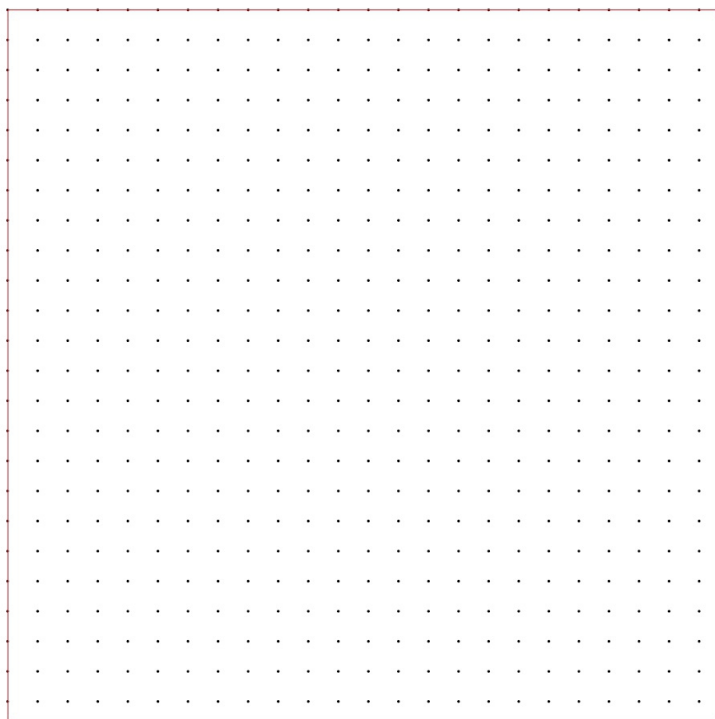
► Como se trata de un cuadrado, razonando análogamente se justifica que también se pueden poner

$E(23,75) + 1 = 23 + 1 = \underline{24 \text{ filas de puntos}}$

Es decir, cabrían:

$(n^\circ \text{ de filas}) \cdot (n^\circ \text{ de columnas}) = 24 \cdot 24 = \mathbf{576 \text{ personas}}$

Ciñéndonos al vértice superior izquierdo del rectángulo, esta trama de puntos colocados en los vértices de cuadrados sería un resultado válido:



B) ¿Cuál es máximo número de personas que se pueden examinar? ¿Cómo hay que colocarlas?

Tal y como se ha visto en el apartado B) del problema anterior, con la trama al tresbolillo nuestras filas están separadas ~ 1,73 m, en lugar de 2 m

► $47,5 : 2 = 23,75$ luego un segmento de 2 m cabe 23 veces en el lado de 47,5 m.; $E(23,75) = 23$

Esto significa que se pueden poner $23 + 1 = 24$ puntos en cada fila IMPAR, como en la trama cuadrada.

También en las filas PARES hay 24 puntos, pues el cociente $47,5 : 2 = 23,75$ ($47,5 = 2 \cdot 23 + 1,5$) permite asegurar que en ellas cabe el último punto, ya que las filas pares están desplazadas 1 m hacia la derecha con respecto a las impares.

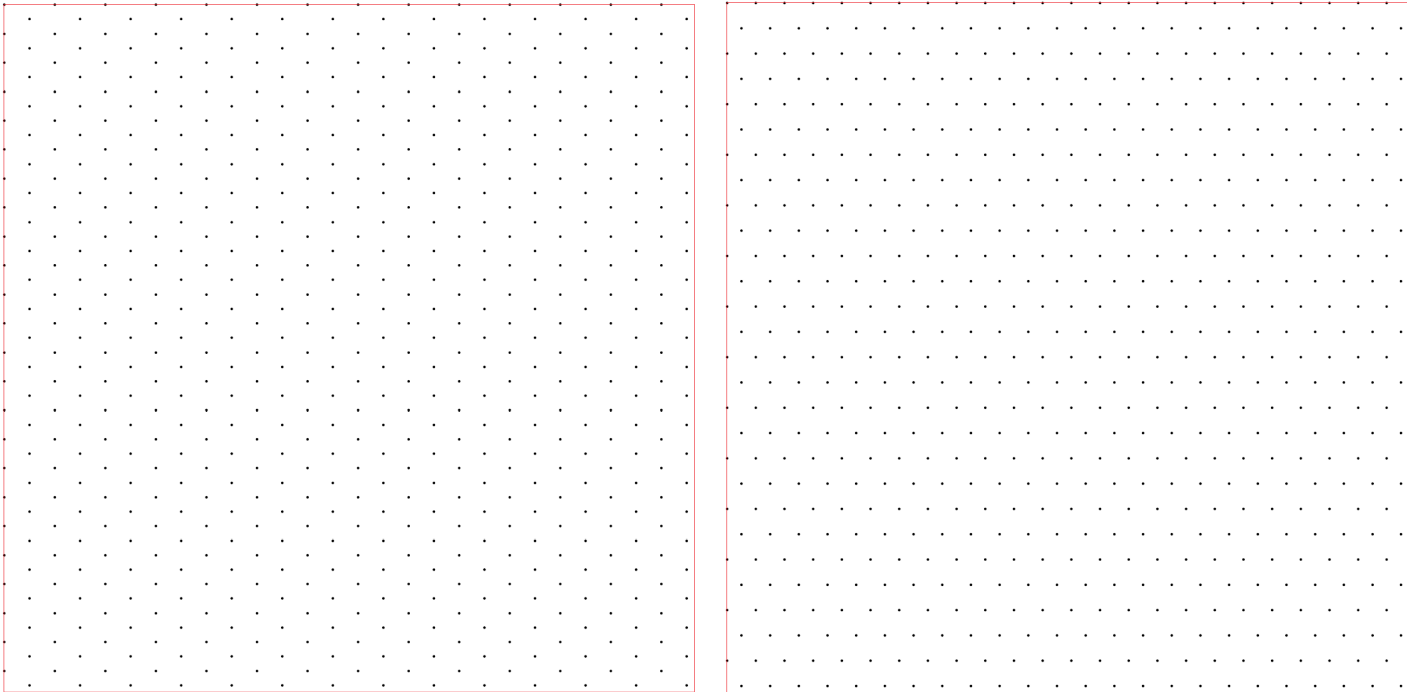
En resumen, todas las filas tendrán 24 puntos, sean impares o pares.

► $47,5 : \sqrt{3} \approx 27,4$ luego un segmento de $\sqrt{3}$ m cabe entero 27 veces en el lado de 47,5 m.; $E(47,5 : \sqrt{3}) = 27$

Esto significa que se pueden poner $27 + 1 = 28$ filas

Por consiguiente cabrán: $(n^{\circ} \text{ de filas}) \cdot (n^{\circ} \text{ de puntos en cada fila}) = 28 \cdot 24 = 672 \text{ personas}$

En esta ocasión, al tratarse el espacio disponible de un cuadrado, girar la trama 90° no altera en absoluto el resultado y se siguen obteniendo 672 posiciones, tal como se puede apreciar en estas dos figuras:



En <https://www.omnicalculator.com/construction/plants> (*Plant Spacing Calculator*, de Bogna Haponiuk) se calcula TODO lo anterior sin esfuerzo alguno. Sólo hay que introducir los datos de las dimensiones de la parcela, la distancia entre los puntos y el tipo de trama que queremos emplear (cuadrada o triangular equilateral).

C) ¿Qué % de aumento en el aforo se puede llegar a obtener respecto a la tradicional disposición en filas y columnas?

$672 : 576 = 1,1666666... = 1 + 0,1666666... = 1 + \frac{16,6666...}{100} \Rightarrow$ el aumento es del 16, 6666...% = 16,6̂%

=====

Problema nº 3

¿Cuál crees que sería el máximo aumento teórico posible en el aforo que casi podría alcanzarse en un espacio cuadrado suficientemente grande ubicando a las personas de forma óptima con respecto a la tradicional colocación en filas y columnas perpendiculares? (Aviso: este tercer problema supera el nivel de 2º ESO)

► Si llamamos d a la "distancia social" que hay que mantener entre cada dos puntos, con la distribución "en cuadrados" la separación entre las filas también es d ; con la distribución en triángulos equiláteros ("al tresbolillo"), la separación entre las filas pasa a ser $\frac{\sqrt{3}}{2}d$ (mediante el Teorema de Pitágoras).

► El nº de filas que podemos colocar en una parcela y la separación que hay entre ellas son MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (MIP).

► Llamaré: c al nº de filas que hay en una parcela con distribución en cuadrados
 t al nº de filas que hay en una parcela con distribución en triángulos

$$\text{Por tratarse de MIP, se tiene que: } t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}d = c \cdot d \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{3}}c \approx 1,1547c$$

$$\text{Es decir, } t \approx c + 0,1547c = c + \frac{15,47}{100}c = c + 15,47\%c$$

Luego el aumento del nº de filas, y por tanto del nº de puntos (plazas, personas, plantas, ...) al pasar de la distribución en cuadrados a la distribución al tresbolillo es, en parcelas suficientemente grandes, del orden del **~ 15,47 %**

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \cdot 100\% \approx 15,47\%$$

* Apéndice

¿Por qué en el título de estos problemas figuran *Johannes Kepler* y *Johann Carl Friedrich Gauss* con un 😊?

Podemos encontrar una explicación en una entrada publicada el 4 de enero de 2013 en el "blog" [¡Mates. Mates!](#), del profesor D. [Miguel Ángel Díaz Martínez](#):

Empaquetamiento de esferas

Hagamos el siguiente experimento: extendamos un montón de monedas en una mesa e intentemos agruparlas de manera compacta. Veremos como cada moneda se hace rodear de otras seis, formando una retícula hexagonal. **Carl Friedrich Gauss** demostró que, en un espacio euclídeo de dos dimensiones, la disposición regular de círculos con mayor densidad es el empaquetamiento hexagonal en el que cada círculo está rodeado de otros seis. La densidad de este empaquetamiento es:

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0,9069$$

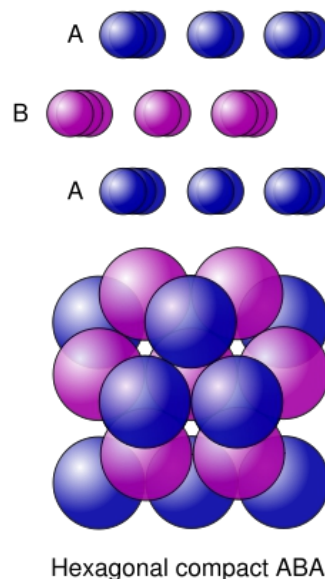
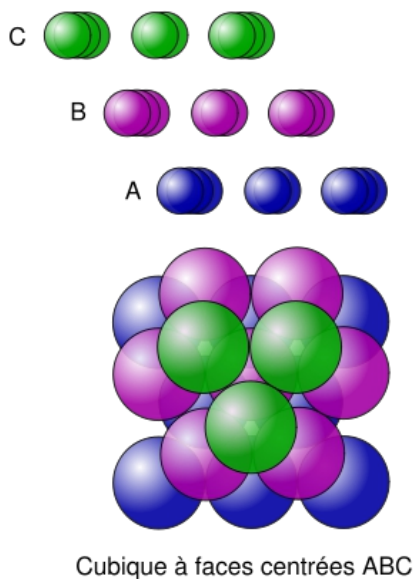
Ahora pasemos al campo tridimensional. Si volcamos naranjas en un contenedor no se produce un empaquetamiento regular como en el caso bidimensional, sino uno irregular, que no forma una disposición ordenada. Este empaquetamiento irregular tiene una densidad de aproximadamente el 64% de la densidad de las esferas.



Si procedemos a colocarlas una a una, de forma ordenada y con la mayor densidad posible, está claro que una vez colocadas tres naranjas, la cuarta será colocada en un segundo nivel en el hueco que dejan las tres naranjas de abajo.



Ahora bien, al poner más naranjas en un tercer nivel tenemos dos opciones, el llamado *empaquetamiento cúbico centrado en caras* – alternancia ABCABC...- y el *empaquetamiento hexagonal* – alternancia ABAB...-. El siguiente esquema nos ayudará a entenderlo:



En estas disposiciones cada esfera está rodeada por otras 12, y ambas disposiciones tienen una densidad media de

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,74048$$

La conjetura de Kepler es una conjetura formulada por el físico, matemático y astrónomo **Johannes Kepler** en 1611, que afirma que ésta es la densidad máxima que se alcanza con cualquier apilamiento de esferas. Porque ya sabemos que en matemáticas una cosa es formular un resultado (más o menos) obvio y otra cosa es demostrarlo.



Thomas Callister Hales

Hubo que esperar hasta 1998 para que el norteamericano **Thomas Callister Hales** (1958-) anunciara que había demostrado la conjetura de Kepler. La comprobación de Hales es una demostración por casos en la que se prueban agrupamientos mediante complejos cálculos de ordenador. Hales formuló una ecuación de 150 variables que recogía cinco mil posibles agrupamientos de esferas iguales. Para realizar la revisión de la demostración se seleccionaron doce matemáticos, pero al ser tan compleja comentaron que estaban seguros “al 99%”. Por tanto, la conjetura de Kepler está cerca de convertirse en un teorema, aunque está aún pendiente de una demostración más elegante.

(Nota a posteriori: En 2017, la demostración formal fue aceptada en la revista [Forum of Mathematics](#))