

Investigaciones

Francisco HERNÁN *

No hace mucho, en un programa deportivo de la televisión, un redactor, instalado en una hermosa estación de montaña e impecablemente equipado para esquiar, anunciaba que en ese programa y en otros dos sucesivos iba a dar un breve curso de esquí a los espectadores que aún no tuviesen esa habilidad. Enseguida aparecieron en pantalla un par de monitores (ninguno de los cuales era él) que descendían parsimoniosamente por maravillosas laderas de Vermont (Canadá). El redactor, al que —se supone que para crear ambiente— no le faltaban ni las gafas ni los palos, explicaba los movimientos de los dos expertos.

Al cabo de diez minutos la primera lección estaba terminada. La locutora de enlace comentó: “Fácil, ¿no? El próximo sábado tendrán ustedes la segunda lección”.

Yo, que aún no sé esquiar, solamente conseguí aprender que las manos deben pasarse por entre las cintas que hay en la parte superior de los bastones con objeto de no extraviarlos por el camino. Pero me perdí cuando se me decía que para girar a la izquierda hay que cargar todo el peso del cuerpo sobre la pierna derecha; ¿por qué no se hace otro tanto para montar en bicicleta o para conducir un coche? En cuanto a frenar, aunque las imágenes mostraban los esquíes en “fácil” convergencia, no pensé que fuese tan sencillo como los entendidos me estaban indicando.

¿Creía realmente el profesor que por el solo hecho de haber enseñado algo, los alumnos lo habíamos aprendido?

El aprendizaje del alumno

Muchos meses de lecturas, contradicciones, debates, titubeos; y muchas observaciones, decepciones y descubrimientos en mis propias clases, análogos a los que muchos compañeros hacen cada día, me habían hecho llegar a algu-

* Grupo Cero de Valencia.

nas conclusiones que no se correspondían con lo que acababa de ver. Por encima de todo, tengo el convencimiento de que es el alumno quien *hace* el aprendizaje construyendo sus propias estructuras conceptuales, dotando de significado a situaciones nuevas y complejas mediante *acciones* físicas y mentales y la rica interacción de ambas.

Hay capacidades que todos poseemos y que tenemos ya disponibles para la práctica. Y hay capacidades que están latentes y esperan ser activadas. El profesor es quien *hace* la enseñanza activando las capacidades adecuadas para la situación en estudio o, más en general, las capacidades que permitan tratar en el futuro las situaciones nuevas que puedan presentarse.

Es larga la lista de capacidades que el profesor puede activar durante el proceso del aprendizaje de las Matemáticas, y de motivos que puedan justificar su enseñanza. Desde actitudes personales, como adquirir confianza en sí mismo, capacidad de disfrutar pensando, confianza en que el pensamiento da resultado, capacidad para tomar decisiones, perseverando en la búsqueda de solución a un problema, autonomía intelectual, flexibilidad para tratar las situaciones...; pasando por capacidades particularmente importantes en Matemáticas, como clasificar, explorar, abstraer, conjeturar y modificar la conjetura en caso necesario, generalizar, distinguir entre conjetura y demostración, emplear la analogía como método sistemático de razonamiento, descodificar y codificar mensajes...; hasta desarrollar el sentido de apreciación de las Matemáticas, por su regularidad, por la manera a la vez sistemática e imaginativa con la que afrontan los problemas, por su belleza y su elegancia, por las múltiples relaciones con otras ciencias, con las formas artísticas, con la vida...

Sin embargo, creo que muchas de esas propuestas tienen un carácter más bien estático, como si hiciesen más referencia a lo que los profesores vemos o hemos visto que a lo que nuestros alumnos verán cuando, dentro de unos años, estén en situación de poner plenamente en práctica sus capacidades. Si consiguiésemos hacer una previsión acerca de cuáles serán las capacidades esenciales que se requerirán dentro de doce o quince años para vivir y sacar partido del mundo tal como será entonces y no tal como es ahora, seguramente de esa larga lista emergerían algunas que destacarían sobre las demás.

No pongo en duda que ser capaz de abstraer y generalizar, o de perseverar en la búsqueda de soluciones y tratarlas de un modo flexible, son elementos que ayudan a configurar una mente que esté preparada para la comprensión de los fenómenos matemáticos y la discusión de problemas en su sentido más amplio. Pero tengo la sensación de que, por paradójico que parezca, no son suficientemente abiertas. Hay algo cerrado impreso en ellas. Se puede dar un paso más y preguntarse: si hubiera que resumir en pocas palabras lo esencial de la actividad futura de nuestros alumnos, ¿dónde podría estar?

No encuentro mejor respuesta que ésta: en la capacidad de hacerse preguntas y tomar decisiones. Claro que eso no es lo único, pero ninguna otra capacidad me parece más importante que esa.

¿Y qué es hacerse preguntas y tomar decisiones ante una situación matemática, sino investigar?

La investigación escolar

No sé si los investigadores profesionales estarán completamente de acuerdo con esta idea. En cualquier caso, confío en que encuentren familiares algunos rasgos de lo que a continuación va a narrarse. Espero también que no consideren carente de sentido la afirmación principal contenida en este artículo, esto es, que los alumnos de Bachillerato *pueden* hacer investigaciones.

“Problema” e “investigación”, los dos términos en torno a los cuales propongo aquí dar unas cuantas vueltas, son tanto en el lenguaje cotidiano como en el científico convenientemente vagos; del mismo modo que lo es el término “azul”, que puede evocar distintas impresiones en distintos lectores, sin que por ello dejen de estar de acuerdo en que hay una amplia zona común a esas impresiones que justifica el uso de la misma palabra.

Para evitar, sin embargo, una excesiva vaguedad quizá convenga establecer una línea de demarcación entre ambas nociones. Aunque tal línea, como veremos, no debe carecer de flexibilidad.

Un problema es una situación que implica un objeto o propósito que hay que conseguir, hay obstáculos para alcanzar ese propósito y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo.

Un buen problema matemático es aquel que representa un desafío a las capacidades deseables en un matemático; no deja bloqueado de entrada a quien lo ha de resolver, es decir, la persona que lo acepta reconoce que el problema está a la altura de sus posibilidades; tiene interés por sí mismo, independientemente de que esté relacionado con otras disciplinas o con la vida cotidiana, o de que tenga una utilidad práctica inmediata. Por lo general, el camino marcado por un problema está claramente especificado.

Una investigación comporta casi todas las características de un problema, pero difiere en la última: lo esencial de una investigación está en que es el alumno quien elige su propia dirección; son las preguntas que el alumno se hace y las decisiones que ha de tomar con respecto a esas preguntas las que determinarán el camino que va a seguir.

Entra en el carácter de una investigación el que el profesor no limite ninguna iniciativa coherente, aunque no esté entre las que él había pensado de antemano.

En una investigación debe apreciarse más la larga atención dedicada a unas pocas ideas que la corta atención dedicada a muchas dispersas.

Una investigación es mucho más trabajo del alumno que trabajo del profesor (como casi todo en el aprendizaje de las Matemáticas).

El profesor debe animar a tomar nota de las reglas generales que el alumno vaya obteniendo; pero su tarea es más escuchar que hablar (como casi siempre en las clases).

Quien hace una investigación escribe acerca de las Matemáticas que ha

estado haciendo. Escribir de Matemáticas es difícil; por eso hay que dejar tiempo para la redacción y presentación del trabajo.

Si se desea que los alumnos sean capaces de hacer investigaciones matemáticas, parece indispensable que los profesores también lo sean, y sepan elegir las situaciones propicias para que el alumno tome su propio camino y las decisiones ajustadas a su propósito.

El problema de las fichas amarillas y verdes

Hace algún tiempo me encontré¹ con un llamativo problema:

“Se tienen fichas amarillas a la izquierda de un espacio libre, a cuya derecha hay fichas verdes. Una cosa así:

... A A A V V V ...

Las fichas amarillas solamente pueden moverse hacia la derecha y las fichas verdes sólo hacia la izquierda.

Cada ficha puede o bien deslizarse un lugar, si hay hueco, o bien saltar sobre la inmediata de distinto color si el hueco es adyacente a esta última. Cada movimiento consiste en mover una sola ficha.

No es preciso mover alternativamente fichas de distinto color.

¿Cuál es el mínimo número de movimientos que hay que realizar para intercambiar los colores, es decir, para poner las verdes a la izquierda del hueco y las amarillas a la derecha?”.

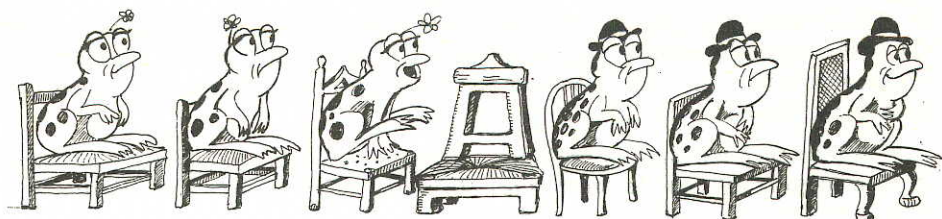
El problema me interesó, así que le dediqué toda mi atención. Lo propuse a los alumnos de tercer curso; les gustó. Muchos le dedicaron tanto o más tiempo que yo. Unos llegaron lejos, otros se quedaron a mitad de camino.

Tiempo después volví a verlo de nuevo en otra publicación². Nada hay menos secreto ni menos privado que un atractivo problema de Matemáticas. Se extiende como una mancha de aceite y al final nadie sabe dónde tuvo su origen o quién lo propuso primero.

¡Pero qué distinto era esta vez! Su enunciado era menos rígido, más abierto, daba más opciones. La profesora que lo contaba comenzaba con la presentación de un juego: hay siete sillas, las tres primeras ocupadas por tres ranas macho y las tres últimas por tres ranas hembra, quedando en el centro una silla vacía.

¹ BELL, A. W.: *The Learning of General Mathematical Strategies*, University of Nottingham, 1976.

² ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS: *Teaching Styles*, A. T. M., Queen Street, Derby, 1984.



El objetivo: cambiar la posición relativa de los machos y las hembras, poner los machos a la derecha y las hembras a la izquierda.

La profesora no empezaba dando las reglas del juego, sino *preguntando* por ellas.

Las reglas del juego

Una vez acordadas las reglas y jugado el juego, preguntaba: "Y bien, ¿qué podemos hacer ahora? ¿Cómo podemos cambiar el juego sin cambiar las reglas?".

Aquello me pareció algo estupendo, así que decidí tomar la idea y me propuse hacerlo en dos clases distintas, una de 1.º y una de 2.º. También empecé preguntando: "¿Cuáles creéis que deberían ser las reglas del juego?".

Y poco a poco se fueron desgranando las siguientes:

1. "Saltar sobre una rana a la silla vacía".
2. "Una silla sólo puede estar ocupada por una rana".
3. "Mover alternativamente una rana macho y una hembra".
4. "Pueden permutar posiciones una rana macho y una hembra que estén al lado".
5. "Deslizarse a una silla vacía".
6. "Está permitido avanzar o retroceder".
7. "Cada vez se mueve una sola rana".

"¿Alguna más?".

"No, ya vale".

"Echemos un vistazo antes de ponernos a jugar". Las reglas 4 y 7 eran contradictorias, de modo que fue preciso elegir una de ellas. No hubo acuerdo en la elección. Propuse suprimir la 4. (Debo confesar que la iniciativa de esta regla 4 me pilló por sorpresa. Yo no había pensado en ella y como no podía prever las consecuencias de aceptar esta regla incliné la balanza hacia la regla 7 que me era más familiar. Tomé la decisión que me era más cómoda).

"Ya podéis empezar. ¿Cuántos movimientos necesitáis para cambiar las ranas de posición?".

Unos sacaron monedas y comenzaron a moverlas. Otros simbolizaron con M y H, respectivamente, e hicieron en su papel un listado de las consecutivas posiciones que iban obteniendo. Unos quince minutos más tarde comienza a oírse: 19, 21, 15...

"Ahora se pone más interesante —dije en voz alta—; una cosa es jugar y otra preguntarse por la forma más eficaz de jugar. ¿Cuál es el mínimo número de movimientos que se precisan?"

Los que tenían más de 15 lograron reducirlos a 15 evitando hacer movimientos hacia atrás, con lo que la regla 6 se reveló superflua. Mientras tanto, la regla 3 había mostrado igualmente su inadecuación.

El número mínimo es 15.

La pregunta "¿Qué puedes hacer ahora?" fue comprendida en seguida por algunos, que pasaron a 4 ranas macho y 4 ranas hembra; otros no supieron qué responder y tuve que abrirles calle. Los que habían manipulado monedas avanzaron con rapidez; los que hicieron un listado de las sucesivas posiciones del juego se metieron en un lío. Mientras los primeros encontraron los 24 movimientos que bastan, la mayoría de los segundos se pasaban.

"El número mínimo es efectivamente 24. ¿Cómo podemos seguir? ¿Cómo podemos cambiar el juego sin cambiar las reglas? Ensayad distintas posibilidades."

Ya estaba la investigación definitivamente en marcha.

"Pues poner más ranas a cada lado". "Muy bien; hazlo".

"Poner más ranas macho que hembra". "¿Ya tienes alguna regla general cuando hay el mismo número de ranas a cada lado?". "No, todavía no". "Entonces tal vez te convenga más generalizar primero el caso más fácil y ponerte luego con lo más difícil. Ya tienes dos problemas por resolver. Adelante".

"Poner dos sillas vacías". "Estupendo; cuando lo tengas resuelto pasas a 3, 4, n sillas vacías". (En el problema de las fichas amarillas y verdes se ponía como condición fija que hubiese un solo hueco en el centro. Ni yo, ni ninguno de los alumnos que lo hicieron en su momento, pensamos en la posibilidad de que hubiese más de un hueco. Nos habían propuesto el problema y lo habíamos hecho tal como nos lo habían propuesto).

Cada uno está ya a lo suyo y va a su propio ritmo.

(A muchas personas les gusta oír música mientras estudian; ese día me había llevado a clase una radio). Me llaman de vez en cuando para contarme cosas, para solventar alguna duda. Solamente entonces observo que la regla 1 ha sido comprendida de distintas formas. La mayoría han supuesto implícitamente que se ha de saltar sobre una rana del otro sexo; pero unos pocos han interpretado la regla como que se puede saltar sobre cualquier otra rana. ¿Por qué no había aparecido antes esta discrepancia? Pues porque cuando no hay más que una silla vacía, las dos interpretaciones conducen a los mismos resultados. La diferencia solamente se hace evidente cuando se supone que hay más de una silla vacía; cuando, para la desesperación de la mayoría, esto es, de los que han seguido la primera interpretación,

el número de movimientos mínimo con la estrategia encontrada es mayor que el número de movimientos mínimo con la estrategia seguida con la segunda interpretación.

¡Ah! Pero estos últimos tienen nuevos problemas: no es igualmente fácil con números pares que con números impares. "Número impar de qué, ¿de ranas o de huecos?"

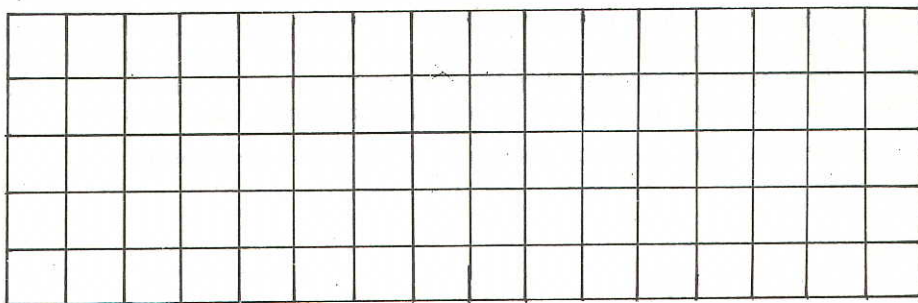
Y la historia sigue; pero creo que no es necesario llegar aquí hasta el final. Sobre todo teniendo en cuenta que la historia no tiene un guión que determine lo que ha de pasar, y otros profesores en otras clases pueden disfrutar de sus propias historias que les resultarán más vivas y más divertidas que la mera lectura de un relato ajeno.

Construcción de poliedros

Sí que quiero contar cómo aprendí de mis errores, que no fueron pocos, como se ha visto.

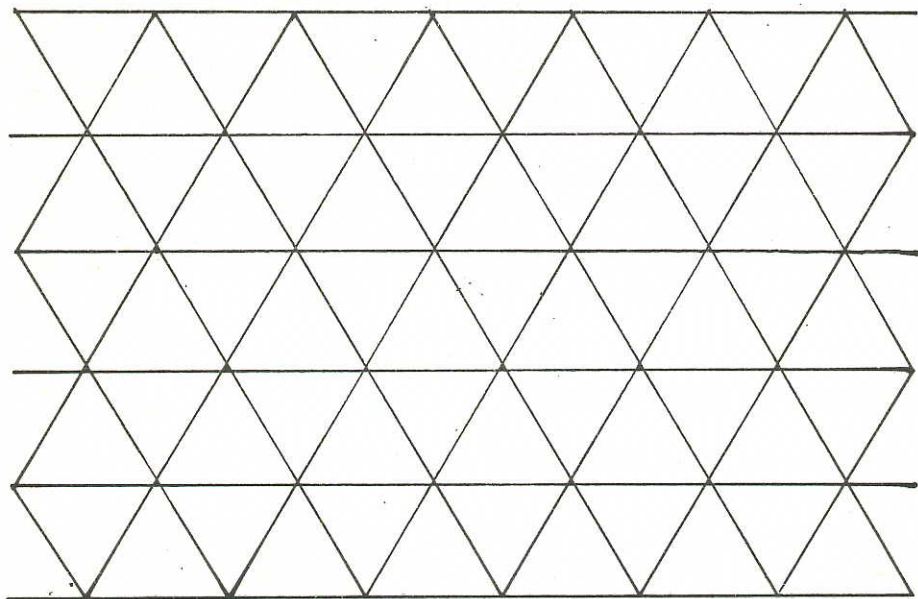
Mucha gente se lo pasa bien recortando y pegando. En Matemáticas abundan las ocasiones para recortar y pegar; una de las mejores es la construcción de poliedros de cartulina partiendo de sus desarrollos planos. ¡Pero incluso eso es aburrido cuando ya nos dan el desarrollo plano y sólo se nos deja la tarea manual de cortar y pegar! En Matemáticas, casi todo puede resultar aburrido cuando no se nos deja tomar iniciativas. Todo lo contrario ocurre cuando uno nota que lo que construye depende de sus propias ideas. Personas que no soportan estar veinte minutos ante un libro de texto son capaces de estar enfrascados durante una hora en una investigación. Como ésta que paso a referir.

Cuando de construir poliedros se trata, las tramas cuadradas disfrutan del



austero privilegio de la unicidad. El único poliedro convexo que puede construirse con todas sus caras cuadradas es el cubo. Ciertamente es que un cubo se puede construir partiendo de varios desarrollos planos distintos que consisten de seis cuadrados en una sola pieza. Pero la variedad que contienen las tramas triangulares es mucho mayor.

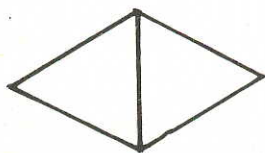
La verdad es que las tramas triangulares son una mina.



No sólo tres de los cinco poliedros regulares están formados por triángulos equiláteros, sino que hay multitud de poliedros no regulares cuyas caras son todas triángulos equiláteros iguales.

Es frecuente dar el nombre de *deltaedros* a los poliedros *convexos* cuyas caras son triángulos equiláteros iguales. Tras la experiencia de las fichas y las ranas pensé en no cometer el error de limitar las iniciativas que cabe tomar en una trama triangular, limitaciones que derivarían de una situación cerrada, tal como "Construye todos los deltaedros" o "Alguien dice que solamente hay ocho deltaedros; trata de construirlos todos". Así que decidí proceder de manera menos ortodoxa y llamar deltaedro a todo poliedro que tenga como caras triángulos equiláteros iguales, y aceptar la noción vaga de poliedro que toma como carácter esencial el hecho de que "cierre", del mismo modo que una primera noción de polígono es una línea poligonal que "cierra".

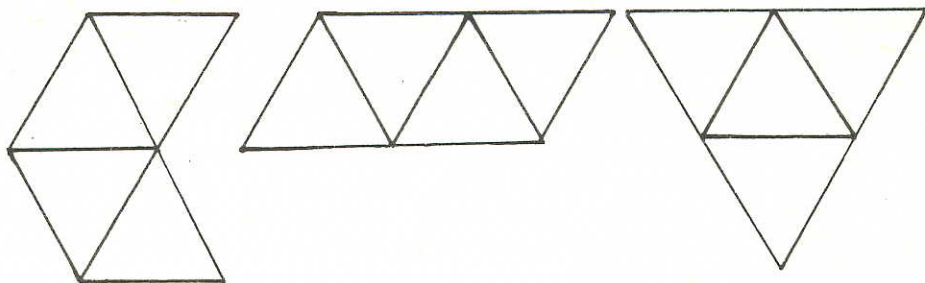
Empleamos para la trama triangular la siguiente terminología:



diamante-2



diamante-3

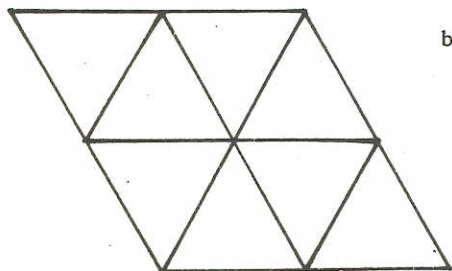


diamantes-4

y, en general, diamantes- n a las figuras *análogas* formadas por n triángulos equiláteros. Correlativamente, deltaedro- n es el poliedro que puede construirse a partir de un diamante- n .

La investigación, que ocupó una semana de clase, comenzó con algunas propuestas concretas:

- ¿Con qué diamantes-4 puedes construir deltaedros-4?
- ¿Hay más de un deltaedro-4 posible?
- Dibuja diamantes-5 y prueba a hacer algún deltaedro-5. (Es imposible, pero no era el momento adecuado para buscar una demostración de esa imposibilidad y seguimos adelante).
- Busca diamantes-6 con los que puedas hacer un deltaedro-6.
- Hay varios deltaedros-8. Construye todos los que puedas. ¿Cuál de ellos te parece más armonioso?



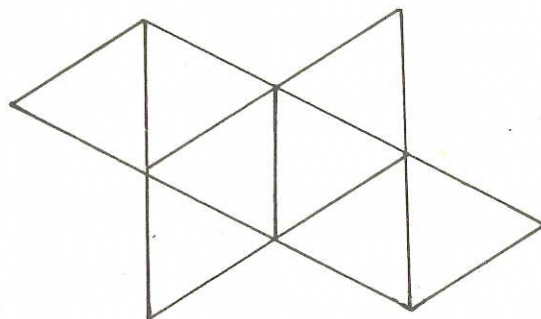
Este es un diamante-8. Piensa cómo habría que doblar para hacer un deltaedro-8.

Con estos comienzos y las observaciones y discusiones que los acompañaron, ya fue suficiente para echarse a volar. La siguiente propuesta ya fue general: "Investiga sobre deltaedros 10, 12, 14, 16, 18, 20... Si son bonitos, bien; si son "raros", mejor que mejor".

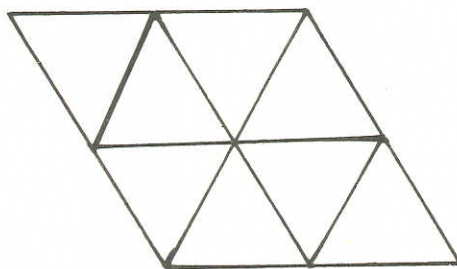
Pues bien, allí pasó de todo. Me hubiera resultado imposible prever la variedad de observaciones y descubrimientos que en cada lugar de la clase los alumnos iban haciendo. Estos son algunos de ellos:

- Alumnos que dudan inicialmente del deltaedro-6 porque “no dobla igual por todas partes”.

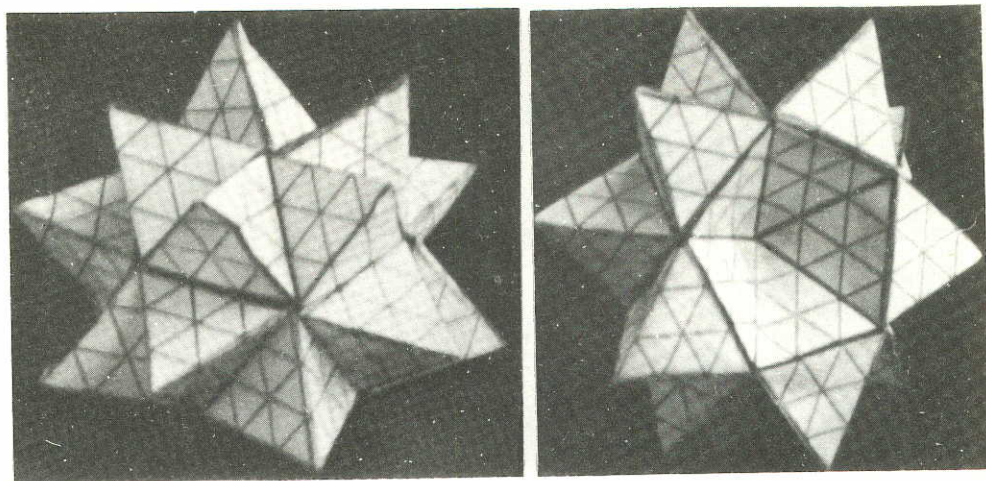
La observación tiene mucho sentido, porque previamente sólo habían construido el cubo y el tetraedro, que son poliedros regulares y “doblan” igual por todas partes; mientras que el deltaedro-6, no. Esta es una manera muy natural de distinguir entre poliedro regular y poliedro no regular.



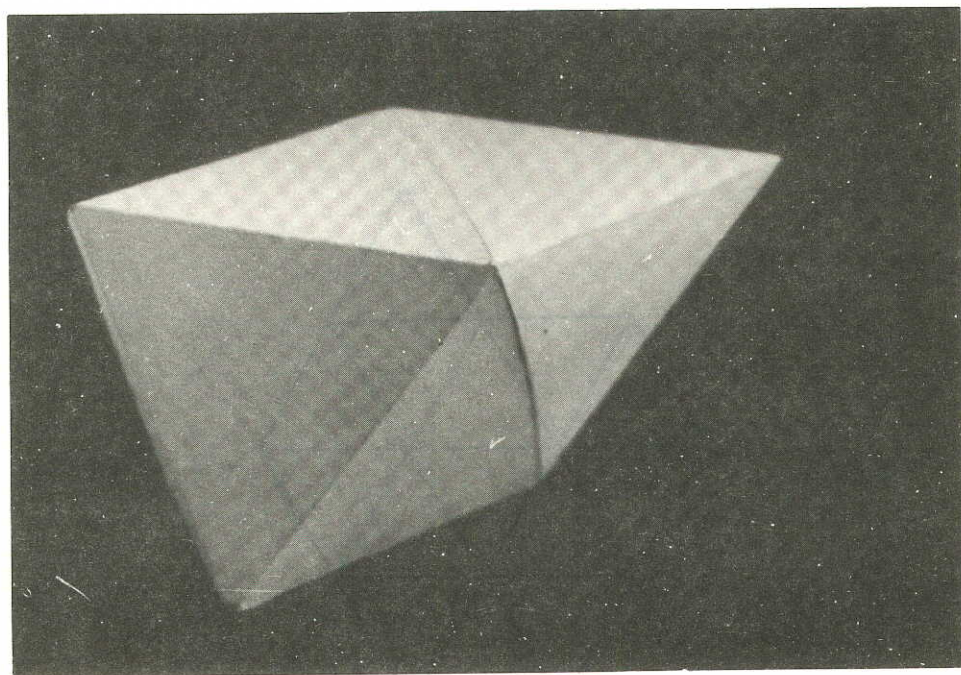
- Deltaedros-8. Un mismo desarrollo plano permite construir dos deltaedros-8 completamente distintos. Uno de ellos, el octaedro regular; otro, un deltaedro cóncavo que se obtiene uniendo el lado a con el a', el c con el c' y el d con el d'.



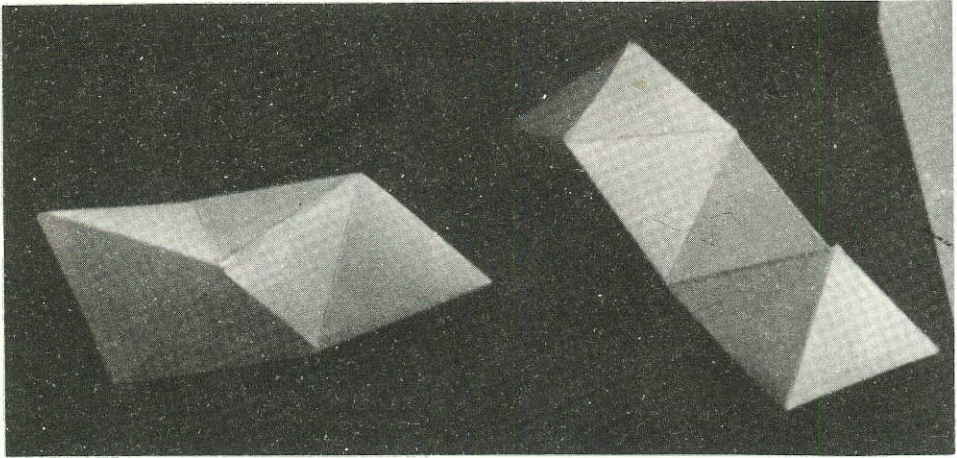
- Deltaedros “monstruos”. Deltaedros flexibles, porque proceden de deltaedros unidos por una arista. Por ejemplo, dos tetraedros unidos por una arista; pero que se obtienen partiendo de un único desarrollo plano.
- Descubrimiento de un módulo generador de deltaedros, el tetraedro regular. Si se unen, por una cara, un deltaedro ya construido y un tetraedro se genera un nuevo deltaedro.



También la mera yuxtaposición de tetraedros genera nuevos deltaedros.

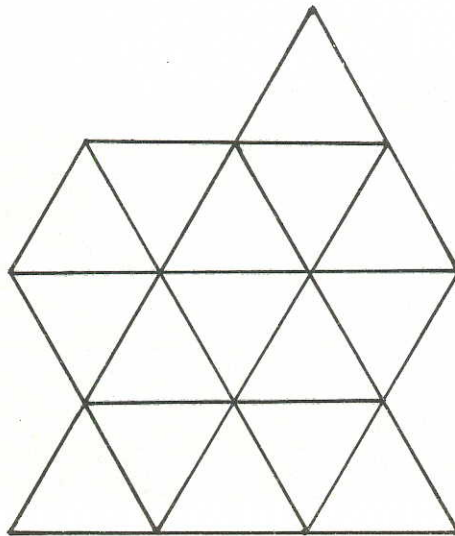


- Deltaedros “dudosos”. El descubrimiento anterior presenta, sin embargo, nuevos problemas. Si se unen por una cara un octaedro regular y un tetraedro regular, la figura resultante ¿es un deltaedro? ¿O no lo es, porque dos de sus caras forman una sola cara que es un rombo?



— Deltaedros serpiente.

Hay material suficiente para ampliar la comprensión de diversos conceptos: poliedro regular, poliedro no regular, poliedros cóncavos y convexos, falsos poliedros, volúmenes, diedros, etc.



La enseñanza de las Matemáticas

Un profesor impaciente fracasará si intenta que sus alumnos hagan investigaciones. Una condición ha de prevalecer sobre todas cuando se propongan investigaciones en una clase. Esta condición es *disponer de todo el tiempo que haga falta*.

Pero si el profesor reflexiona un poco acerca de su propia actividad como matemático deberá reconocer que él mismo necesita muchísimo tiempo cuando se enfrenta a una situación matemática nueva.

La enseñanza de las Matemáticas ha sido mala porque ha estado basada en el supuesto de que los alumnos (y los profesores) debían *repetir* las Matemáticas ya enlatadas.

Cuando los alumnos (y el profesor) *hacen* Matemáticas, y este es el único cambio verdaderamente radical, los esquemas de temporalización del aprendizaje se derrumban y nacen otros nuevos. Quizá se puedan enseñar muchas Matemáticas en una hora, igual que el profesor de esquí pretendía enseñar lo fundamental del esquí en treinta minutos. Pero ¿cuál es la opinión del que aprende? Su actitud lo suele transparentar: que mejor es alejarse y esperar ocasiones más razonables y más estimulantes.

Claro que no todos los alumnos tienen inicialmente la autonomía y la capacidad necesarias para emprender una investigación. ¿Pero qué mejor puede hacer el profesor que *animar* a que el alumno adquiera el gusto por hacerse preguntas y aprenda a tomar una situación en sus propias manos?

Vistas así las cosas, las investigaciones en "ranas" o en deltaedros no son sino un entrenamiento para cuando tengan que tomar en sus manos su propia vida. Creo que es una buena razón para enseñar Matemáticas.

