

La analogía en la formación de conceptos

Francisco Hernán
(Grupo Cero)

Hilo para las redes

1. Estoy hablando por teléfono con Londres y arreglamos una cita en un café de la calle... (óigo algo parecido a «lafbra»);

— ¿Cómo dices?

— «Lafbra», esquina a «güelinton».

— Deletréalo, por favor.

— L, de Logroño; O, de Oslo; U, de Universo; G, de Guadalajara, H, de Huesca, B, de Barcelona, O de Oslo...

— Ya lo tengo. Allí nos veremos.

¿Por qué no le he pedido que deletree Guadalajara o Huesca? ¿Por qué ha deletreado la primera palabra y no la segunda? ¿Por qué no le he pedido yo que deletree la segunda?

2. a) Encima de la mesa hay una tarjeta (ver figura 1).

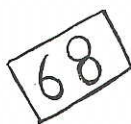


Figura 1

¿Cómo sé si es el número sesenta y ocho o el ochenta y nueve?

b) Si la tarjeta fuese esta otra (ver figura 2).



Figura 2

no habría ninguna duda. Es el tres el que determina a los otros dos.

3. ¿Qué es ? 

¿Un trapecio?

¿La primera letra mayúscula del alfabeto?

CAPITOL

¿La letra griega «delta»?

«Me he inscrito en un curso de ala  »

Depende. Depende de otras cosas: de los contextos, de otros conceptos, de otros símbolos, de mi historia, de mis gustos, de mis conocimientos.

Resonancia

Los ejemplos precedentes son pretextos o pretextos para algunas afirmaciones que no sabría justificar sino de metáforas y analogías. Pero ¡ay! ni unas ni otras se transfieren por procedimientos lógicos, sino por fragmentos de experiencia compartida entre el emisor y el receptor, que a menudo se comunicarán mejor por un guiño que por una larga explicación.

Porque es una grata cualidad de los seres humanos el que muchas veces tengamos la capacidad de entrar en resonancia con la experiencia de otros y reconocer así que nuestra experiencia es a la vez personal y generalizada¹. O, dicho con más intimidad: «Sólo adquiere consistencia *real* lo que se reconoce una vez vivido. Primero reposa dentro sin que uno pueda nombrarlo; luego surge de improviso como imagen, y lo que a otros les ocurre se abre paso en uno mismo en forma de recuerdo: entonces es algo *real*»².

A aquella resonancia —y no a su irrefutabilidad— confían su significado las declaraciones que tutelarán el desarrollo de estas páginas y que pueden ser consideradas o bien como punto de partida o bien como punto de llegada —cada uno lo decidirá en virtud de su propia experiencia:

¹ Cfr. John MASON: «Only awareness is educable», en *Mathematics Teaching*, septiembre, 1987.

² Elías CANETTI, *La antorcha al oído*, pág. 123, Muchnick editores, 1985.

El conocimiento no se forma mediante una sucesión de conceptos que se almacenan. El proceso no consiste en adquirir un concepto y luego almacenarlo en la memoria junto a otros. Sino que forma parte del propio hecho de ser un concepto el *modo* de estar almacenado en la memoria. No es un concepto hasta que no está en una *red*, en un mapa, en una estructura. Esta estructura conceptual es tanto más sólida cuanto mayor es el número de sus conexiones. De ahí que un concepto evolucione en la mente y esté en ella más o menos arraigado. Y de ahí también que muchos conceptos estén permanentemente abiertos y no encerrados en una disciplina particular, ni siquiera en las matemáticas, porque los enlaces que les van dando substancia proceden de conocimientos, experiencias, imágenes, creencias, filosofías, que a su vez están en continua renovación, selección y encaje.

Por analogía

La analogía, como tejedora de fragmentos y creadora de conexiones es uno de los principales determinantes del modo de almacenamiento, es decir, de la formación de conceptos.

Eso es al menos lo que se quiere exponer en lo que sigue, tomando un ejemplo como caja de resonancia para la generalización.

a) Los primeros pasos

Si a un grupo de personas se le da un montón de fichas de parchís y se pide a cada una que haga con esas fichas lo que quiera, es muy probable que entre las cosas que hagan estén estas: (ver figuras 3 y 4)

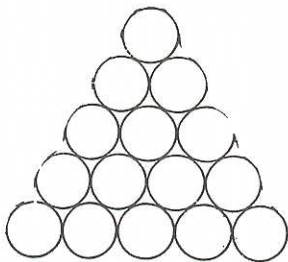


Figura 3

y que perciban aquí triángulos en sucesión descendente

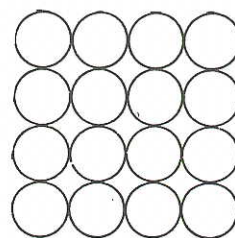


Figura 4

y perciban aquí cuadrados en sucesión expansiva³

¿Se pueden asociar *números* a los triángulos sucesivos?

3, 6, 10, 15, 21, 28...

¿Y a los sucesivos cuadrados?

4, 9, 16, 25, 36, 49...

Ahora bien, estos últimos son los cuadrados numéricos, los números cuadrados. Entonces los números 3, 6, 10, 15, 21, 28... adquieren, por analogía, un atributo nuevo: son los *números triangulares*.

¿Habrá, por analogía, *números hexagonales*? ¿Cuáles serán?

Ahora es más difícil formar un hexágono manipulando las fichas, porque su contacto es menos compacto, queda un hueco (ver figura 5) pero si se coloca una ficha en el hueco todo encaja de manera sencilla (figura 6)

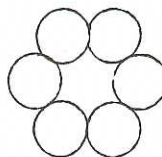


Figura 5

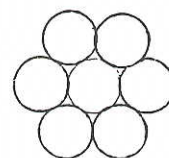


Figura 6

y haciendo nuevas capas de círculos tendremos efectivamente números hexagonales: 1, 7, 19, 37, 61...

(Además no es extravagante empezar por el 1 —el círculo se parece mucho al hexágono— lo cual sugiere que también sería razonable empezar por 1 los números cuadrados y los números triangulares.)

¿Y los números *pentagonales*?

En seguida se ve que algo no funciona. No se puede construir alegremente un pentágono regular con cinco fichas. Por añadidura, una vez hecho, queda un hueco irrellenable. ¿Qué pasa?

Pasa que los pentágonos regulares no compactan el plano por sí solos.

³ En tan sólo un par de líneas ya hay dos analogías («triángulo» y «cuadrado») y dos metáforas («descendente» y «expansiva»).

Descubrimos o redescubrimos así un soporte geométrico para la analogía y este soporte la fortalece en unos casos y la debilita, al hacer fallar en otros.

b) *Revisión*

Al analizar el proceso se ve que se han estado haciendo analogías a un nivel más profundo: hemos usado el círculo como si fuese un cuadrado, como si fuese un triángulo equilátero, como si fuese un hexágono regular; y ello sin hacerlo explícito.

Es cuando se ha querido hacer ocupar al círculo el lugar de un pentágono regular cuando esta analogía de nivel más profundo ha necesitado de una revisión. Y esta revisión se extiende a la consideración del círculo como pieza para los mosaicos regulares.

En los números triangulares se ha utilizado esta imagen (figura 7)

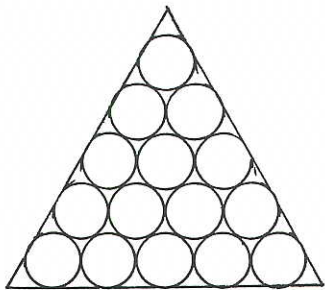


Figura 7

mientras que la imagen de mosaico regular triangular es esta otra (figura 8).

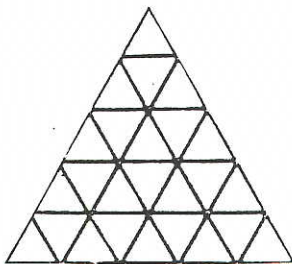


Figura 8

Con lo que, en realidad, los números triangulares tendrían que haber sido 1, 4, 9, 16, 25, 36...

¡Que son los números cuadrados!

Es decir, que los números triangulares no procedían de formar triángulos cada vez mayores, por ampliación, sino que tenían su origen en este otro mosaico triangular (figura 9).

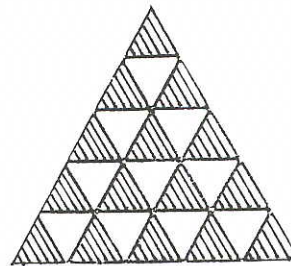


Figura 9

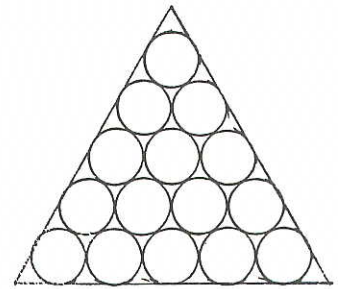


Figura 10

que es plausiblemente análogo a esta otra (figura 10).

Tenemos, pues, recuperados los números triangulares 1, 3, 6, 10, 15..., que provienen de los triángulos negros de la figura 9. Y al recuperarlos nos encontramos con una novedad: los triángulos blancos de la figura 9 vuelven a formar una sucesión de números triangulares,

(los negros) 1, 3, 6, 10, 15, 21 ...

(los blancos) 1, 3, 6, 10, 15 ...

Es decir, que cada número cuadrado es la suma de dos números triangulares:

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

¿Y en los números hexagonales?

Hemos utilizado esta imagen (figura 11)

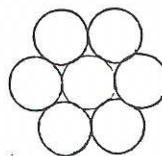


Figura 11

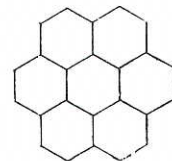


Figura 12

cuando, en verdad, la imagen de mosaico regular hexagonal es ésta (figura 12) que en sí misma no es un hexágono.

¿Significa esto que hay que abandonar la analogía para los hexágonos?

No, no hay que hacerlo si bajamos a un nivel todavía más profundo: sustituir los hexágonos no por sus círculos circunscritos, sino por sus centros (figura 13).

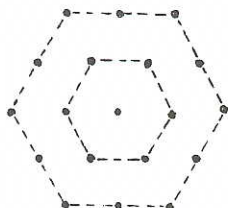


Figura 13

De esta manera podemos lograr de nuevo una visión unitaria, pero reorganizada ahora en torno a puntos y no a círculos.

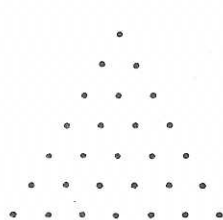


Figura 14

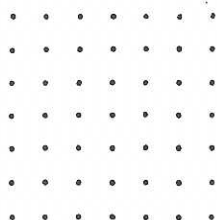


Figura 15

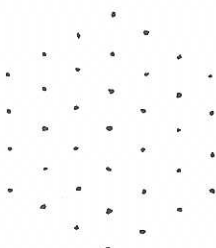


Figura 16

Con las siguientes relaciones numéricas:

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 1 + 2 = 3$$

$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

...

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

El n -simo número triangular es la suma de los n primeros números naturales.

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1 + 3 = 4$$

$$C_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$C_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

...

$$C_n = T_n + T_{n-1} = 2 T_n - n = n^2$$

El n -simo número cuadrado es la suma de los números triangulares n -simo y $(n-1)$ -simo.

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = 1 + 6 = 7$$

$$H_3 = 1 + 6 + 12 = 19$$

$$H_4 = 1 + 6 + 12 + 18 = 37$$

...

$$H_n = ?$$

Debería esperarse una relación entre los números hexagonales y los números triangulares, porque un hexágono está compuesto por seis triángulos; y, en efecto, esa relación existe (figura 17).

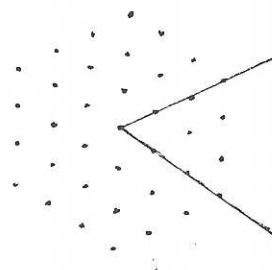


Figura 17

$H_n = 6 T_n - 6$ veces el radio (porque cada radio se ha contado dos veces) + 1 (que es el del centro)

$$= 6(T_n - n) + 1$$

$$= 3 n (n - 1) + 1$$

c) Extensión

Tejada la red pueden hacerse tres cosas: c.1) hacer una red de mayor tamaño; c.2) seguir formando nuevos nudos, nuevas relaciones, hacer la red más tupida; c.3) tejer otra red diferente, pasar a otro campo conceptual.

c.1) Una red de mayor tamaño, introduciendo una dimensión nueva:

Si hemos explorado los polígonos regulares, una extensión natural serán los poliedros regulares.

Las condiciones de la analogía se agotan ya de entrada para los hexágonos, que no tienen análogos en el espacio. Quedan los cuadrados que llevarán a los cubos. Y quedan los triángulos equiláteros que llevan a los tetraedros regulares. Los cubos llenan el espacio por compactamiento y hay números cúbicos. Pero los tetraedros no llenan el espacio por compactamiento,



cuatro triángulos equiláteros pequeños forman un triángulo grande (figura 18)

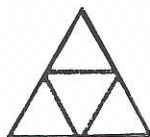


Figura 18

pero cuatro tetraedros regulares pequeños no forman un tetraedro regular grande. Así que no hay números tetraédricos.

Sin embargo, una vez más, eso no significa abandonar el campo, sino solamente abandonar la compactidad y volver a quedarse con círculos (o con puntos) y sus análogas, las esferas. En ese caso, las figuras 3, 4 y 5 ganan la vertical y nacen los números piramidales.

Piramidales triangulares: formados por capas sucesivas ascendentes de números triangulares,

... 21, 15, 10, 6, 3, 1.

Piramidales cuadrados: formados por capas sucesivas ascendentes de números cuadrados,

... 25, 16, 9, 4, 1.

Piramidales hexagonales: formados por capas sucesivas ascendentes de números hexagonales,

... 61, 37, 19, 7, 1⁴.

$$(PT)_n = \sum_{i=1}^{i=n} T_i \quad (PC)_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \quad (PH)_n = \sum_{i=1}^{i=n} H_i$$

⁴ Otra bifurcación de ser aquí tenida en cuenta. Los números piramidales triangulares y cuadrados corresponden a apilamientos de esferas como apilamientos de naranjas en un mercado. Pero otros números piramidales hexagonales no se corresponden con ese apilamiento, las naranjas quedarían inestables. Otros números piramidales hexagonales son, pues, posibles.

⁵ Esta idea procede de Douglas R. Hofstadter, *Metamagical Themas*, Basic Books, New York, 1985.

c.2) Una red más tupida: transferencias de actividades propias de la estructura interna de una trama plana a la estructura interna de otra.

Si consideramos un tablero de ajedrez (figura 19)⁵

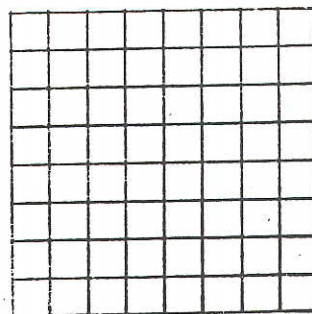


Figura 19

¿pueden concebirse tableros triangulares o hexagonales? ¿Son estos los más razonables? (figuras 20 y 21)

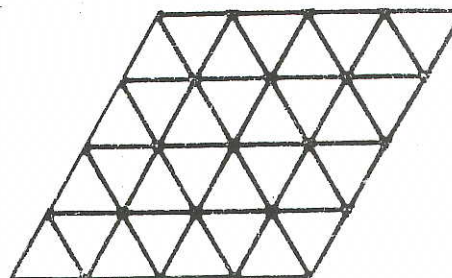


Figura 20

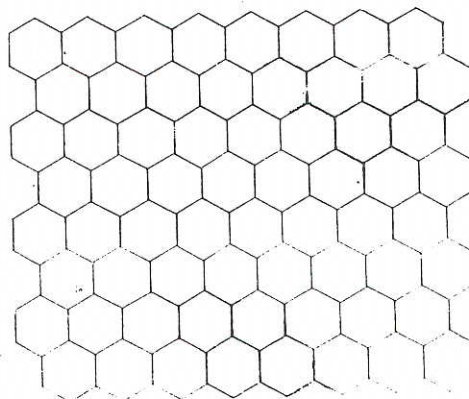


Figura 21

¿Cuál sería en cada uno de estos tableros el movimiento análogo al del caballo en el tablero cuadrado?

Hay varias posibilidades (figuras 22 y 23)

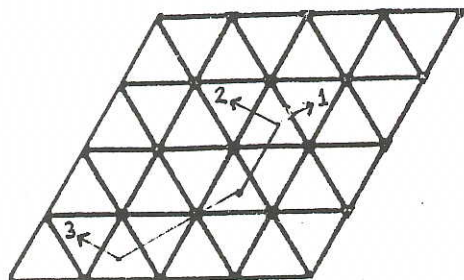


Figura 22

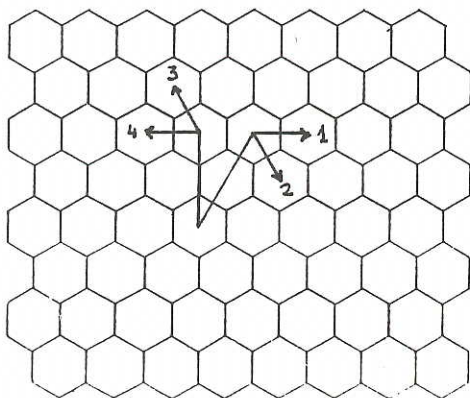


Figura 23

¿Cuál de ellas es la adecuada?

La respuesta es discutible. Pero se introduce un elemento nuevo cuando el objeto inicial, el tablero cuadrado, se define con más precisión; porque a ese tablero le falta una condición esencial en el juego del ajedrez: el tablero debe tener blancos y negros (figura 24) y el caballo cambia, en su movimiento, a una casilla de otro color.

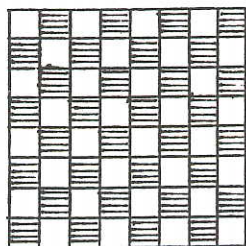


Figura 24

Así que los otros tableros deberán tenerlos también (figura 25).

Los tres movimientos propuestos sirven. ¡Pero se puede ser aún más preciso: en el tablero cuadrado el caballo describe un ángulo recto!

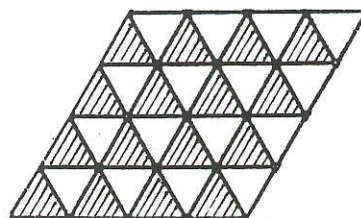


Figura 25

¿Cuál de los tres movimientos cumple esta última condición? Solamente el movimiento 2. ¿Pero es esa la condición análoga en el tablero triangular? ¿No será más bien lo otro, es decir, que un ángulo recto en un tablero cuadrado tenga como análogo un ángulo de 60 grados (o de 150 grados) en un tablero triangular?

En el hexagonal aún hay que ir más al fondo. Cuando se intenta colorearlo de blanco y negro se aprecia que hay otra condición esencial en el tablero cuadrado y es que dos cuadrados del mismo color no pueden estar contiguos, esto es, no pueden tener un lado común. Pero esa condición no se puede cumplir en el hexagonal, salvo que se usen tres colores (figura 26).

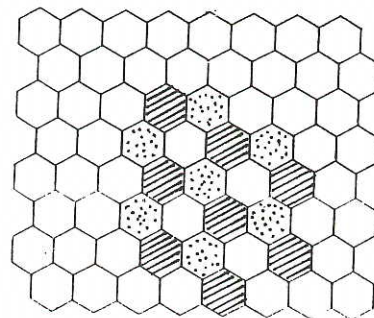


Figura 26

De todas esas condiciones, el movimiento 2 no cumple la del cambio de color; el 4 no cumple la del cambio de ángulo. Quedan, por consiguiente, en pie los movimientos 1 y 3. ¿Cuál de los dos es el «más análogo»?

Y seguramente no se podrá decir hasta que no se consideren los movimientos de las otras piezas del ajedrez: el alfil, la torre, etc. El movimiento del caballo no puede ser considerado aisladamente, sino en relación con los otros, formando una estructura conceptual poblada de conceptos que están en relaciones mutuas que la solidifican.

¿No es así como aprendemos a leer, o como aprendemos a distinguir un arbusto de un árbol? ¿No sabemos mejor lo que es el color verde cuando descubrimos que puede obtenerse con amarillo y azul?

c.3) Una red en otro campo conceptual

Las fichas del parchís nos han llevado lejos. Otros materiales, también sencillos, pueden ayudarnos en la creación de analogías. Empleando cubitos encajables de varios colores puede comenzarse de muchas maneras. Por ejemplo, con la siguiente propuesta: hacer una figura parecida a la de la figura 27, donde letras diferentes simbolizan colores diferentes.

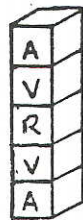


Figura 27

Naturalmente, dependerá de la persona o las personas que lo hagan el que aparezcan unas u otras figuras; pero si es un grupo, la variedad de «resultados» será grande. Esta es una muestra de los producidos por un grupo de profesores durante una sesión de trabajo:

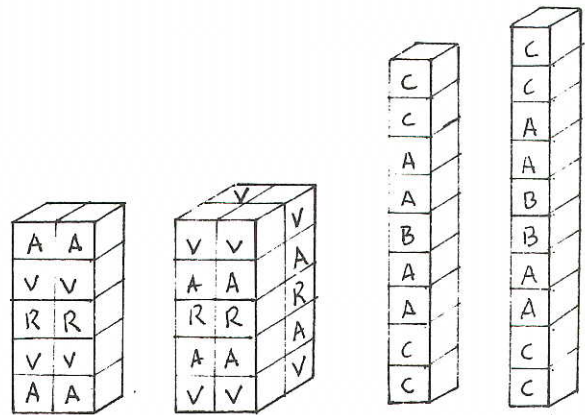
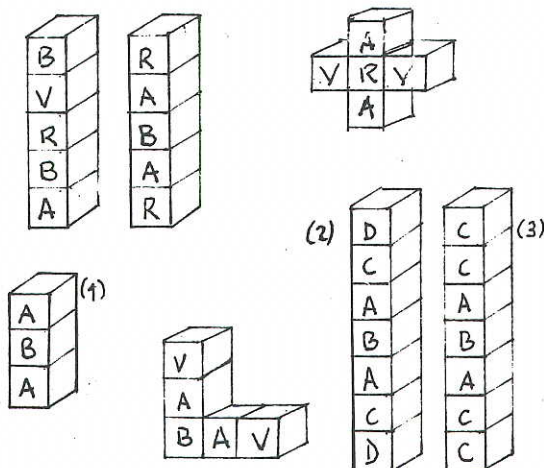


Figura 28

Como se ve, varios conceptos se han puesto en juego: número, color, simetría, tamaño; en unos casos, simultáneamente, en otros casos, no. Lo más interesante es que *en cada uno* de los ejemplos pueden darse razones para proponerlo como parecido al original, y que una vez elegido uno de ellos, o un subconjunto de ellos, la red empezará a formarse. Como ocurre si elegimos (1) y (2) como «buenos» análogos del original; porque entonces se genera una cadena ascendente de 3, 5, 7, 9, 11... cubos en la que, además del número, se está teniendo en cuenta la simetría central en la disposición de los colores. [¿Que pasaría si los «buenos» análogos fuesen (1) y (3)?]

¿Cuál sería el análogo con *un solo cubo*? Parece haber pocas dudas de que tendría que ser un cubo cualquiera! La analogía en cadena descendente ha sido una analogía efectiva. Pero ¿qué habría ocurrido si hubiésemos empezado desde abajo, es decir, si la propuesta inicial hubiese sido:

hacer una figura parecida a ésta ?

¿No sería raro que se construyesen estas figuras?

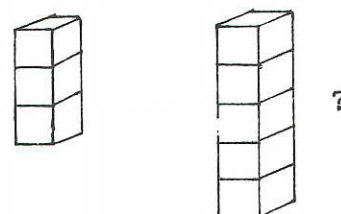


Figura 29

¿No sería más plausible producir figuras como estas otras?

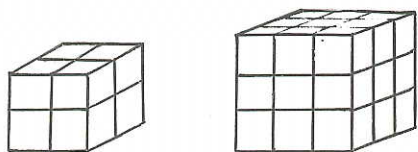
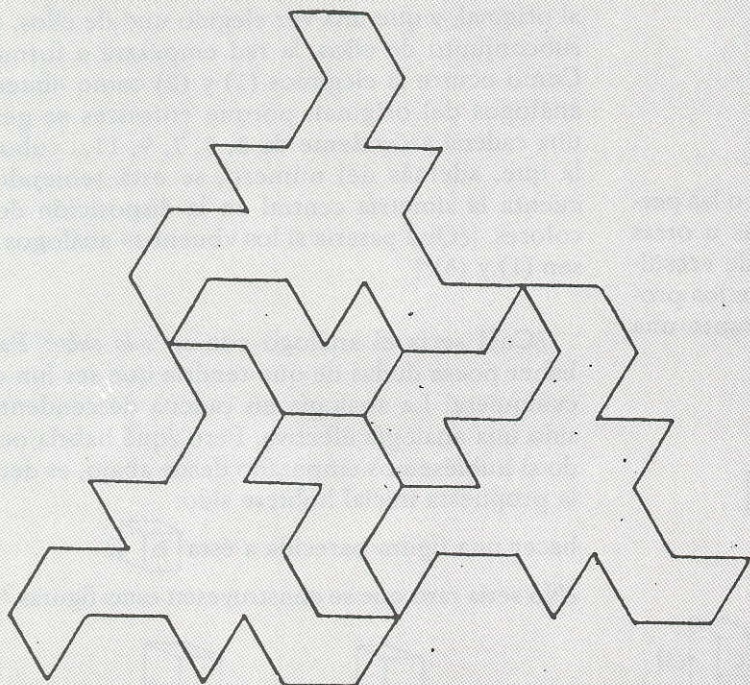


Figura 30

Pero entonces, curiosamente, uno se siente un poco decepcionado; la analogía es excesivamente dura, es casi una igualdad, es poco productiva. Y la razón no es otra que ésta: el motivo inicial  estaba demasiado definido: un cubo blanco; o dicho al revés, la completa información conceptual *aislada* contiene poca información analógica; el campo analógico estaba casi cerrado de antemano.

El lector puede elegir otros más abiertos y seguir el curso que más le guste, que mejor cuadre con sus intereses y sus conocimientos previos. Hacer dinámicos los conceptos. Disfrutar con su capacidad para establecer conexiones entre ellos. Seguro que encontrará resonancia en las experiencias, las imágenes y las analogías establecidas por otros.



¿Puede continuarse en todas direcciones este diseño? ¿Cómo puedes estar seguro de tu respuesta?