



E D U C A C I O N
A B I E R T A

Aspectos didácticos de Matemáticas. 5

F. HERNÁN, M. L. CALLEJO, P. BOLEA,
E. CID, L. RICO, E. CASTRO



UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

F. HERNÁN, M. L. CALLEJO, P. BOLEA,
E. CID, L. RICO, E. CASTRO

ASPECTOS DIDÁCTICOS DE MATEMÁTICAS. 5



INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Con el patrocinio del
GOBIERNO DE ARAGÓN

ZARAGOZA
1995

ESTILOS DE ENSEÑANZA. TERRITORIO Y LÍMITES DE LA CLARIDAD

Francisco HERNÁN

IB Ramón Llull. Valencia.

1. EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Desde la óptica más general posible, creo, el problema de la enseñanza de las matemáticas trae a la imaginación un famosísimo problema de la historia de la astronomía.

Johannes Kepler, de forma empírica, e Isaac Newton después, con más rigor matemático, resolvieron el problema de los dos cuerpos: en la interacción mutua de un planeta y el Sol, sin tener en cuenta las acciones de otros cuerpos, aquel se moverá describiendo una elipse.

El problema de los tres cuerpos es la etapa siguiente del problema de los dos cuerpos. Planeta y Sol no forman un sistema cerrado. En el caso de la Tierra, el movimiento de rotación de la Luna afecta a aquella órbita teórica de la Tierra de manera que ésta no describe realmente una elipse, sino que se desplaza sobre la superficie de un toro.

Pero el problema de los tres cuerpos planteado en su generalidad resultó ser, para sorpresa de todos, de una dificultad extraordinaria. Conservar sólo tres cuerpos ya es una restricción del problema, porque se dejan de tener en cuenta los efectos del resto de los innumerables cuerpos celestes; pero los intentos de resolución lo simplificaban aún más, estudiando tres cuerpos con determinadas particularidades. Cuando a finales del siglo XIX Henri Poincaré lo abordó, consideró el problema restringido al movimiento de dos planetas y el Sol suponiendo el Sol inmóvil —una aceptable aproximación dada su gran masa—.

Lo que Poincaré descubrió es que el problema de los tres cuerpos no era integrable, lo que significaba que no hay solución analítica, es decir, expresable por las funciones conocidas. También concluyó que pueden existir soluciones caóticas. Más recientemente, Michel Hénon ha sido el primero en mostrar que en una versión simplificada del problema de los tres cuerpos se encuentran efectivamente trayectorias caóticas, sensibles a pequeños cambios en las condiciones iniciales.

El problema planetario de la enseñanza de las matemáticas es también un problema de los tres cuerpos: Qué, Cómo, A Quiénes.

Para los practicantes de un oficio que —aun tan sitiado por los teoremas— no ha logrado producir ninguna conclusión que tenga la décima parte de la fuerza de un teorema, el problema es de una amplitud formidable. Debe decirse, no obstante, en honor de los profesores, que han tardado algo menos que los físicos y los matemáticos en descubrir que el problema así planteado es irresoluble; que no tiene una solución «analítica», es decir, expresable mediante la «funciones didácticas» conocidas.

Es más, hay pruebas de que no ya el problema didáctico de los tres cuerpos sino los diversos problemas de dos cuerpos no han sido resueltos en su planteamiento general, porque las soluciones que se han ido produciendo se han ido correlativamente mostrando inestables, esto es, dependientes de la evolución de las matemáticas, de los estudiantes y de las características sociopolíticas de la época en que se inscriben.

Con la estrategia de disminuir el número de variables e idealizar las condiciones iniciales, el problema queda siempre abierto a la introducción de perturbaciones y a la revisión de las hipótesis de partida. Con lo que las soluciones que progresivamente se proponen quedan a la espera de juicios que valoren la justeza del grado de aproximación alcanzado.

En una ocasión ya célebre, Jeremy Kilpatrick vino a afirmar con mucha agudeza algo semejante:

Los problemas de la educación matemática nunca están claramente definidos, y menos aún resueltos. Cada generación de educadores matemáticos termina luchando con muchos de los mismos problemas que generaciones precedentes pensaban haber «resuelto» y me parece que es probable que esta sea una condición permanente en nuestro campo, y no simplemente el producto de nuestra limitada historia y de nuestra falta de acuerdo en los criterios acerca de qué problemas son «resolubles». Nosotros no *resolvemos* problemas de la educación matemática, los *enterramos*. Regresan, como Drácula, para intimidarnos porque nunca logramos clavar una estaca en su corazón.¹

2. TRES MOMENTOS EN LA HISTORIA DEL RECIENTE PROBLEMA

Seguramente ya tenemos suficiente memoria como para hacer una descripción (al menos entrecortada o sincopada) de los principales momentos de la historia reciente. Tan reciente que el primero se remonta a unos 25 o 30 años, el segundo a unos 15 (en algunos sitios algo más) y el tercero se está formando. Tan reciente que puede darse por supuesto que el amable lector creará que todo lo que sigue lo ha vivido y lo ha pensado ya. Al fin y al cabo, ¿quién no está de acuerdo con Hegel en que no se conoce más que lo que se *reconoce*?

¹ KILPATRICK, J., en la revista *For the Learning of Mathematics*, febrero de 1984, Montreal, Quebec, Canadá.

Me parece que el término adecuado es 'momentos' y no 'estratos', porque la aparición del momento 2 no deja oculto al 1, ni la sedimentación del 3 implica la desaparición del 2 o del 1. Coexisten en la práctica de profesores distintos y aun en la de un mismo profesor. En cualquier caso, una coexistencia en conflicto.

2.1. El momento clásico

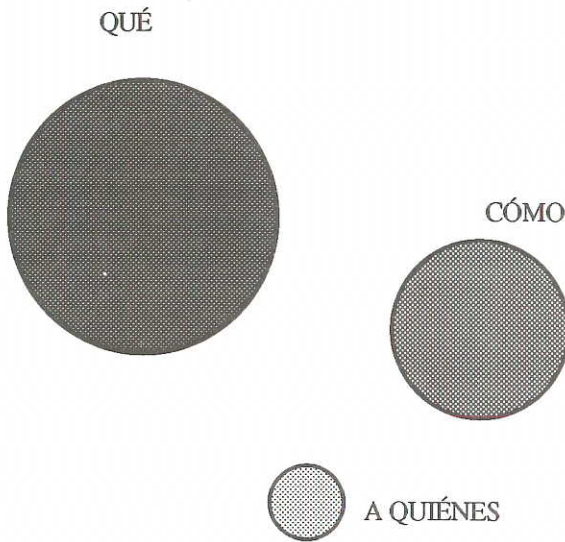


Figura 1

- La masa principal del sistema está en las matemáticas.
- En ellas está el centro de gravedad de la enseñanza.
- Las exigencias del *qué* imponen o determinan los movimientos del *cómo*.
- La masa del *quiénes* es insignificante, porque a todos se les ha de enseñar sustancialmente de la misma forma.

2.2. Una revolución copernicana

A. Crítica de 1

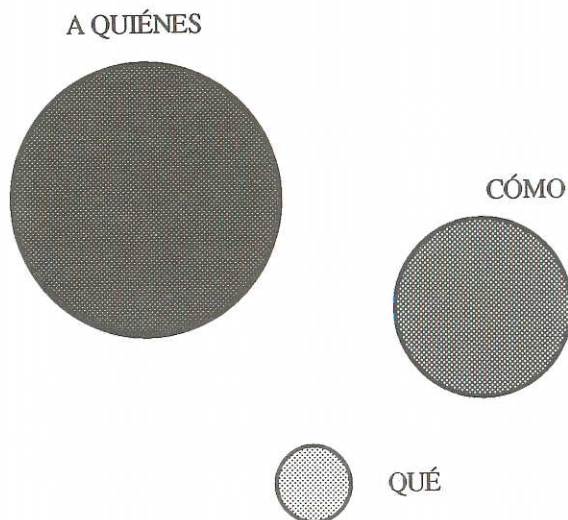


Figura 2

- El gran cambio del momento 2 consiste en el desplazamiento del centro de gravedad de la educación matemática hacia los *estudiantes*.
- Este seísmo es de una importancia capital y es de esperar que duradera (aunque es preciso hacer, y se harán luego, algunas puntualizaciones).

B. Desviación ideológica

Dentro del momento 2 hay un desplazamiento imprevisto hacia el método, que se ve erigido como centro de gravedad.

En virtud de ello, las exigencias del *cómo* imponen las condiciones sobre el *qué*.

Curiosamente, este desplazamiento tiene como consecuencia un rasgo común con el momento clásico: no es preciso distinguir *a quiénes*, el método debe aplicarse con todos igual.

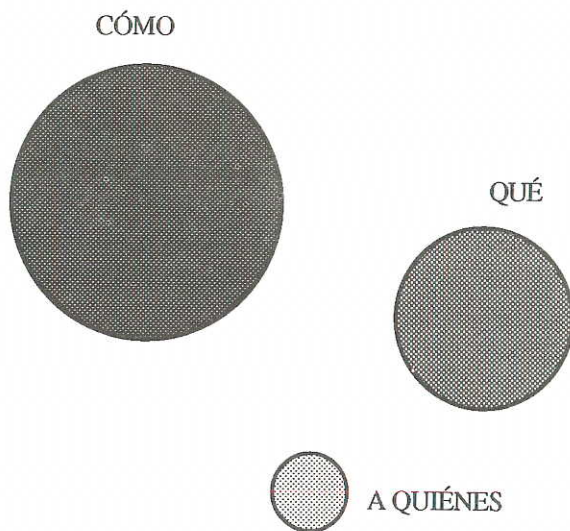


Figura 3

El imprevisto desplazamiento hacia el método no era sin embargo, al menos a posteriori, imprevisible.

No creo, en absoluto, que sea honesto hacer recaer las culpas de ese desplazamiento sobre tres maravillosos libros,

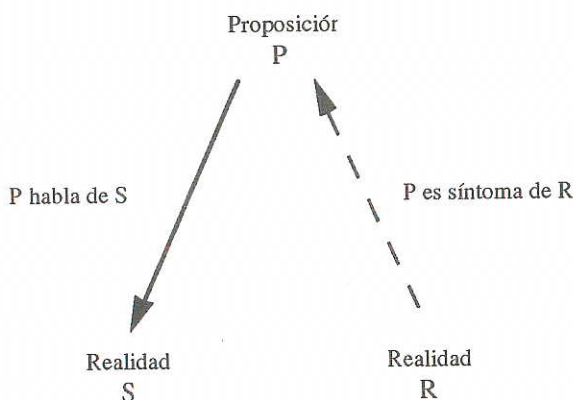
- *La lógica del descubrimiento científico*, de Popper,
- *El descubrimiento matemático*, de Polya,
- *Pruebas y refutaciones*, de Lakatos,

simplemente por el hecho de que los tres estén dedicados a desvelar *cómo* trabajan los científicos y los matemáticos.

Pero sin ellos quererlo —más bien lo habrían repudiado—, estaban llamados a ejercer y han ejercido una enorme influencia en el establecimiento de esta jerarquización ideológica adoptada por los profesores, cuyo destino parece ser el de adoptar muchas ideas y el de producir bien pocas.

En efecto, la asignación de masas de la jerarquía B es ideológica en el preciso sentido definido por Althusser (ya en 1967):

Una proposición ideológica es una proposición que, siendo síntoma de una realidad diferente de la que considera, es una proposición falsa en tanto que se refiere al objeto que considera.²



La jerarquía B es *síntoma* de la realidad de las matemáticas, en las que lo esencial, como en toda ciencia, es el *qué*, los *objetos* que se propone estudiar; cosa que hace según ciertos procedimientos y dotándose de criterios específicos para determinar la validez de sus resultados. Pero la jerarquía B se *refiere* especialmente no a los objetos, sino a los procedimientos.

² ALTHUSER, L., *Philosophie spontanée des savants*, François Maspero, París, 1967.

En consecuencia, el *cómo* se universaliza para todos los estudiantes, que dejan de ser lo que eran en la jerarquía A, la incógnita principal.

Tal vez no sobre añadir que este modelo del *cómo* ha estado teniendo como referente implícito o explícito la etapa 12-16 (de extrapolación ambiguamente reclamada y huidiza). Y que la cristalización en la ideología de la resolución de problemas viene acompañada por un concepto asociado, «el aprendizaje por inmersión».

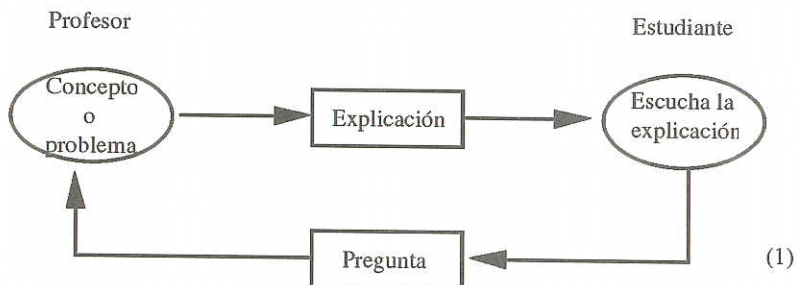
2.3. La autocrítica

2.3.1. Estilos de enseñanza

Aunque pueda parecer extraño en algo tan complejo como la enseñanza, lo cierto es que los dos estilos más frecuentes (yo diría que son los únicos) para presentar y tratar una situación didáctica se pueden esquematizar –dejando aparte los detalles– de una manera bastante simple, puesto que ambos son representables mediante sendos algoritmos iterativos (o casi iterativos).

a) *El estilo impositivo o «a priori»*

El profesor P explica al estudiante E algo, A, en lo que E no ha pensado. Con lo que comienza el proceso retroalimentador siguiente:



En general, A no es indivisible, sino que está compuesto por $a_1, a_2, a_3, \dots$, que se suceden en el tiempo y que no tienen por qué ser todos distintos; E puede preguntar por A o por cada uno de los a_i , y puede interrogar acerca de un a_k determinado varias veces a lo largo del proceso.

En este esquema, E sólo pregunta sobre A, o sobre a_i *después* de que P lo haya expuesto.

El momento I en el que ocurre la explicación de A es, para P, el *final* de un proceso que, empezando por la comprensión de A y seguido por la ordenación 'didáctica' de A, concluye con la versión verbal de A.

Mientras que el momento I en el que empieza la explicación de A es, para E, el *comienzo* de un proceso, del que desconoce cuáles van a ser las etapas y los escollos, del que ignora si va a captar la comprensión parcial y la comprensión global, tras la cual aún faltaría la ordenación 'psico-lógica' personal y, eventualmente, la versión verbal.

Así que la didáctica debe irremediablemente ver I escindido,

$$\begin{array}{cc} I & I \\ (\text{para P}) & (\text{para E}) \end{array}$$

De manera que pensar en

$$P(I) < \text{-----} E(I) \quad (i)$$

es pensar en la interrogación sobre la igualdad

$$\begin{array}{c} ? \\ P(I) = E(I + f(t)) \end{array}$$

donde $f(t)$ es una función del tiempo muy imperfectamente conocida: sólo alguno de sus puntos lo son con precisión suficiente; lo que no basta, desde luego, para expresar esa función como una «ley».

Por otro lado, el diagrama (i) ha de ser completado:

$$P(I - g(t)) \text{ -----} P(I) \overset{?}{=} E(I + f(t)) \text{ <-----} E(I) \quad (\text{ii})$$

El diagrama (ii) recoge, pues, el hecho fundamental de que el instante en el que comienza la explicación es un límite por la izquierda para P, mientras que para E es el comienzo de una cadena de momentos de la que no sabe cuál es su ley de formación, si converge o no, y en caso de que converja, si llegará a saber distinguir hacia qué converge. A es una barrera que separa el tiempo de P, pasado, del tiempo de E, futuro.

Hay aún otros hechos que acrecientan la dificultad de la transposición. Y todos son igualmente obvios.

El primero es que, para P, el conocimiento de $g(t)$ es dado, cosa que le induce a la inferencia de que $f(t) = g(t)$; algo que, si bien puede considerarse una aceptable hipótesis de partida, es preciso someter a la prueba de la experiencia; prueba que se encuentra con un inconveniente, y es que, suponiendo que tanto $f(t)$ como $g(t)$ son funciones de variable continua, el conocimiento que P puede tener de $f(t)$ es *sólo* —en el mejor de los casos— a través de valores *discretos* de t .

El segundo es que ese conocimiento es pertinente para el acto didáctico en cuanto es experimental, esto es, en cuanto se refiere no al sujeto E actual, sino a sujetos E anteriores, conocimiento que P extrapola para hacerlo aplicable al sujeto E actual.

El tercero es que, por lo general, el acto didáctico afecta a varios sujetos E a la vez: $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$. Lo que significa que, en lugar de $E(I + f(t))$, habrá que tener en cuenta

$$E_k(I + f_k(t)) \quad 1 \leq k \leq n$$

con lo cual la hipótesis

$$g(t) = f_k(t) \quad \forall k, 1 \leq k \leq n$$

es prácticamente insostenible.

b) *El estilo dialogante o «a posteriori»*

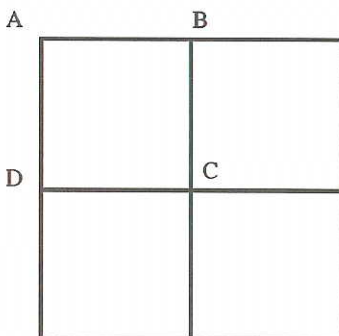
Este segundo estilo reconoce de antemano que es poco probable que $f(t)$ sea igual a $g(t)$ y, en consecuencia, preconiza que P ha de hacer el esfuerzo de adaptarse a E, intente no anticiparse al tiempo de E y ayude a llenar los huecos del proceso.

La primera y más popular versión escrita del estilo dialogante es la que detalla Platón en el *Menón* cuando muestra a Sócrates y a un servidor de Menón manteniendo una conversación en torno al cuadrado. Pocos documentos didácticos hay tan claros en sus tesis como el de Platón; su influencia en la enseñanza de las matemáticas ha sido, y todavía lo es, enorme; y nos parece que (dejando al margen la concepción filosófica que Platón quiere a través de ese ejemplo demostrar, esto es, que el conocimiento no se adquiere en esta vida, sino que es innato y que lo que llamamos conocer no es otra cosa que *recordar*, recuperar uno mismo, de sí mismo, el conocimiento que ya tiene; concepción que muy pocos o nadie defendería hoy en estos términos) la gran mayoría de los profesores caemos bajo su influjo con frecuencia, seguramente con más frecuencia de la que somos conscientes.

El pasaje es harto conocido, pero nos permitiremos hacer una especie de radiografía que viene al caso:

Sócrates se propone demostrarle a Menón que no hay enseñanza sino reminiscencia. Llama a un servidor de Menón.

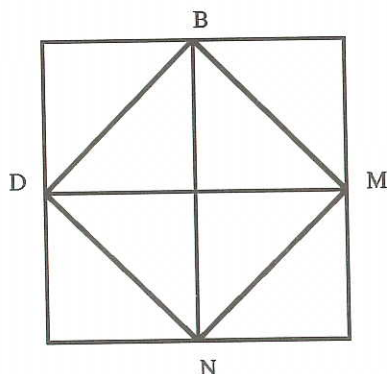
Le muestra la figura siguiente en la que AB mide dos pies y la superficie ABCD mide cuatro pies.



Lo que Sócrates quiere que el servidor descubra, *recuerde*, es cuál es el lado del cuadrado que tiene doble superficie que el ABCD. Y lo hace en dos etapas. En la primera, sus numerosas preguntas (a las que el servidor responde siempre asintiendo o negando, o con brevísimas frases como «Es necesario», «Tres pies», «Ocho», «Nueve») llevan al servidor a una última respuesta: «¡Por Zeus!, Sócrates, que yo no lo sé». Sócrates le dice entonces a Menón: «¿Te das cuenta, Menón, en que punto se encuentra ya del camino de la reminiscencia? Al principio no sabía cuál era el lado de la superficie de ocho pies, como tampoco ahora lo sabe aún; sin embargo creía entonces saberlo y respondía con la seguridad propia del que lo sabe, considerando que no había problema. Ahora en cambio considera que está ya en el problema y, como no sabe la respuesta, tampoco cree saberla». «Al problematizarlo y entorpecerlo le hemos hecho un beneficio para resolver la cuestión.»

En la segunda etapa, «buscando conmigo —dice Sócrates— sin que yo haga más que preguntar, y sin enseñarle», las preguntas van encaminadas a que el servidor «recuerde» la respuesta *correcta*; y Sócrates le insiste a Menón: «Vigila por si me coges enseñándole y explicándole en lugar de

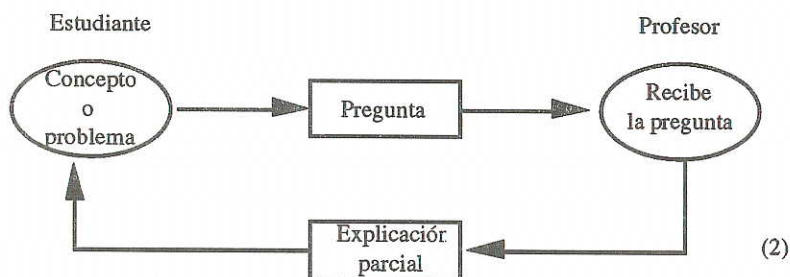
interrogarle por sus propios pareceres». Las preguntas vuelven a ser respondidas con «Sí», «No», «Cuatro veces», «Por supuesto», «El doble», «Ocho pies»,... hasta que el servidor *reconoce* que el cuadrado buscado es el BMND.



«¿Que te parece Menón?», dice Sócrates, «¿Ha contestado él con alguna opinión que no le sea propia?»

El texto es de una modernidad extraordinaria: diagnóstico, aprendizaje a partir del error, autoconvencimiento,... Y cuando decimos modernidad, lo decimos con y sin ironía. Sin ironía, porque sus principios pedagógicos son una anticipación profética de algunos postulados básicos de la enseñanza actual; con ironía, porque, como se ve punto por punto en el diálogo, el estilo socrático no difiere mucho del impositivo o imperativo; el profesor se pone, sí, en el lugar del alumno, pero se pone en el lugar de éste para suplantarlo, porque el profesor hace las preguntas que *el alumno mismo tendría que hacerse*. El alumno está sometido siempre a la iniciativa del profesor. Como ocurre actualmente con muchos actos didácticos que bajo una capa de diálogo esconden la sumisión intelectual del estudiante al profesor.

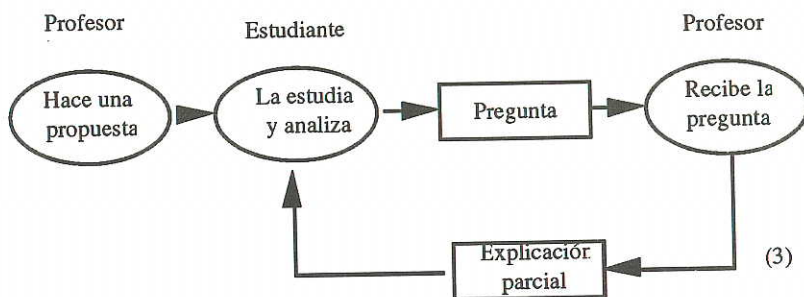
La versión post-socrática del diálogo hace una drástica inversión de los términos; E pregunta a P algo, B, en lo que E *ya ha pensado*:



Esta inversión de los términos implica que el profesor tenga que adaptarse por hipótesis, por principio, al «tempo» o ritmo –ritmos– de los estudiantes, porque sólo puede explicar algo si un estudiante le requiere para que lo haga. («Evita a toda costa responder a preguntas que nadie te haya hecho», dice Polya en la frase última de los comentarios a los diez mandamientos para los profesores).

Los que creen que el esquema (2) es más apropiado que el (1) tienen seguramente razones múltiples para su preferencia. En particular estas dos: por un lado concuerda con un postulado del comportamiento científico que dice que toda investigación comienza con un problema, es decir, con una pregunta que uno se hace (con independencia de que otros se la hayan hecho antes); y por otro lado reafirma un valor social cada vez más estimado: el de la acción y la iniciativa.

Pero hasta un análisis a poca profundidad revela que el esquema (2) es demasiado puro para que sea practicable. De manera que incluso sus más calurosos partidarios, reconociéndolo, defienden un esquema algo más complejo:



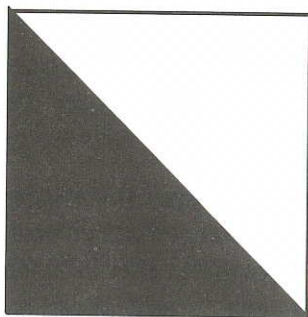
en el cual el profesor tiene un cometido previo a las preguntas del estudiante y por tanto a la explicación: el de proponer al estudiante una situación *pensable por éste*.

Tal rasgo de la propuesta, que sea pensable por el estudiante, es absolutamente necesario para dar comienzo al proceso iterativo de la segunda parte del esquema (3). Y por este motivo limita mucho el tipo de propuestas que puede hacer el profesor. Específicamente las propuestas deben cumplir la condición de que los conceptos y técnicas que hayan de utilizarse para «ponerse en marcha» han de estar ya en poder del estudiante, que entonces podrá emplear su tiempo con una gran autonomía para resolver el problema que tiene enfrente.

'Estar en posesión de los conceptos y las técnicas' debe entenderse de una manera no excesivamente drástica: la resolución del problema puede contribuir a un mejor asentamiento de ambas cosas. Pero en cualquier caso, la condición expuesta impide, consecuentemente, la posibilidad de éxito en propuestas que impliquen conceptos nuevos, desconocidos por el estudiante. Es saludable proponer el cálculo del número de diagonales de un polígono de n lados aunque el concepto de diagonal de un polígono cóncavo sea impreciso o ambiguo para un estudiante; pero es una locura proponer a estudiantes que no conocen el concepto de fracción continua que demuestren que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Con tiempo, obstinación y cierta sensibilidad combinatoria un buen estudiante de 14 o 15 años puede averiguar cuántos cuadrados diferentes pueden formarse utilizando cuatro piezas idénticas a esta:



Pero casi ningún buen estudiante de 16 o 17 años será capaz por sí solo de demostrar el teorema de Pitágoras, de hacer un argumento convincente para probar que hay infinitos números primos, o de estudiar el signo de la función:

$$f(x) = \frac{(x-2)^3 - 7}{2^x}$$

Poco se avanzaría en el aprendizaje de las matemáticas si los estudiantes no aumentasen progresivamente su *stock* de conceptos y técnicas. Es ahí donde el esquema (3) se muestra insuficiente. Los profesores –les guste o no– han de hacerse cargo de que el desajuste de tiempos es insoslayable en muchas ocasiones, en tantas como haya una radical novedad conceptual. Lo que los «dialogantes» han conseguido es que se reconozca que una buena parte del aprendizaje está ciertamente «en manos» de los estudiantes.

Pero no pueden evitar que cuando se trata de *enseñanza*, el tiempo de enseñanza es el límite por la izquierda para uno de los implicados, mientras que el correspondiente tiempo de aprendizaje «debería», sólo debería, conducir al límite por la derecha del resto de los implicados.

Cuando, en efecto, conduce a un límite, puede ocurrir que coincida o que no coincida con el límite por la izquierda. Con lo que se tendría una continuidad local o una discontinuidad evitable, respectivamente.

Cuando no se llega al límite por la derecha, la función enseñanza/aprendizaje es inevitablemente discontinua. Esta función presenta de hecho infinitas discontinuidades que, desde luego, no dependen únicamente del sistema de referencia concreto (alumnos-profesores) ni de los criterios de convergencia (estilos de enseñanza).

2.3.2. *¿Pueden aprender matemáticas todos los estudiantes?*

Hablando en términos de «aprendizaje por inmersión» se podría afirmar que en piscinas de poco calado (de poca hondura de conceptos, o utilizando conceptos ya familiares, o cuando los encadenamientos lógicos necesarios no son excesivamente delicados) lo hemos conseguido, lo sabemos hacer, funciona bien. Pero en piscinas de gran calado no sabemos con claridad lo que eso significa.

Habrá que partir a la búsqueda de experiencias y de ideas; porque, como prueba de nuestra desorientación, ni siquiera nos es fácil rebatir opiniones tan discutibles como la que Thomas Mann pone en boca del narrador en *Doktor Faustus*:

Escuchábamos al conferenciante con gusto y boquiabiertos, como los niños gustan de prestar oído a lo incomprensible y a lo inaccesible. Con mayor gusto en verdad que si se tratara de cosas próximas, correctas y normales. Muchos se resistirán a creerlo, pero ésta es la forma más intensa, la forma superior, y quizás la más fructífera, de la enseñanza. La enseñanza anticipativa, pasando por vastas zonas de ignorancia. Mi experiencia pedagógica me dice que este

es el método que la juventud prefiere y, por otra parte, el espacio que deja uno vacío tras de sí, se llena por sí mismo con el tiempo.³

Dejando aparte que ninguno nos atreveríamos ya a soñar en «la forma superior» de la enseñanza, porque sabemos que ninguna puede aspirar a tal honor, lo que no nos es fácil rebatir es la idea de esa «enseñanza anticipativa»; y puede que no la sepamos rebatir porque aún necesitamos debatirla.

Claro que hay preguntas aún más inquietantes, que tienen su corazón incólume. Probablemente, la consecuencia que más impulso y prestigio ha dado a la jerarquía A del momento 2, que pone como centro primario de atención los estudiantes, ha sido la de responder afirmativamente a la pregunta *¿pueden aprender matemáticas todos los estudiantes?*

Durante mucho tiempo —y, desde luego no soy el único— he pensado que esa era la respuesta adecuada. Ahora creo que eso era un exceso de optimismo, pero sobre todo una obstinada negación de la evidencia. La evidencia de que *entender no es un derecho*. Entender las matemáticas es un proceso que en la inmensa mayoría de las personas comienza con un serio esfuerzo (pocas personas pueden seguir adelante sin él) que no conduce por sí solo al éxito, sino que exige además perseverancia, soledad, capacidad de concentración, un poco de talento y quién sabe cuántas cosas más.

(Pienso también que esa obstinación, esa afirmación voluntariosa puede tener —y seguramente ha tenido— efectos beneficiosos para la enseñanza. Y que la autocrítica, al aceptar una componente negativa en la enseñanza puede contener —y probablemente contenga— un elemento conservador y hasta reaccionario en relación con la práctica del oficio. Pero la razón y la esperanza no siempre van por el mismo camino.)

Me parece que la pregunta estaría mejor formulada si se partiese en dos:

- ¿Son todos los estudiantes capaces de comprender las matemáticas?
- ¿Quieren todos los estudiantes comprender las matemáticas?

³ MANN, T., *Doktor Faustus*, Edhasa, Barcelona, 1978.

En cuanto a la primera, ¿qué reparos pueden ponerse a la respuesta dada por Poincaré y Hadamard hace ya muchos años?

Entre el trabajo de un estudiante que intenta resolver un problema de geometría o de álgebra y un trabajo de invención de un matemático, se puede decir que no hay más que una diferencia de grado, de nivel, los dos trabajos son de una naturaleza análoga.

Ahora bien, ¿cómo es que tantos alumnos son incapaces de este tipo de trabajo, incapaces de comprender las matemáticas? Es lo que Poincaré examina (en *Ciencia y método*) y muestra cuál es la verdadera razón, la cual tiene su fuente en el significado que se debería asociar al término 'comprender':

¿Comprender la demostración de un teorema -dice Poincaré- es examinar sucesivamente cada uno de los silogismos de que se compone y constatar que son correctos, conforme a las reglas de juego?... Sí, para algunos; cuando hayan hecho esta constatación, dirán: he comprendido. Pero no para la mayoría. Casi todos son mucho más exigentes, quieren saber no solamente si todos los silogismos de una demostración son correctos, sino por qué se encadenan en tal orden y no en tal otro. En tanto en que les parecen engendrados por el capricho y no por una inteligencia constantemente consciente del objetivo que se quiere alcanzar, no creen haber comprendido.

Sin duda, no se dan bien cuenta ellos mismos de lo que reclaman y no saben formular su deseo, pero si no tienen satisfacción, sienten vagamente que algo les falta.

Enseñando de manera que cada parte del razonamiento se lleve a su forma enteramente consciente (lo cual parece la mejor manera para que el debutante obtenga una representación rigurosa y clara) lo que ocurre es que no queda nada de la síntesis que nos da el hilo conductor sin el cual se es como el ciego que puede caminar pero que no supiese jamás en qué dirección ir.

Aquellos que tienen la visión de una tal síntesis «comprenden las matemáticas». En caso contrario, hay las dos actitudes mencionadas por Poincaré; y en general es la segunda actitud la que predomina:

el estudiante siente que le falta algo, pero no puede tocar con el dedo aquello que no va; si no sobrepasa esta dificultad, está perdido.⁴

Para responder a la segunda pregunta disponemos de dos tipos de datos, los que recibimos de nuestra práctica diaria en las clases y los que podemos buscar consultando y observando a las personas que tienen profesiones poco cercanas a las matemáticas, personas adultas cultivadas que no tienen las matemáticas como modo de vida, por así decirlo.

Podría decirse entonces por inducción incompleta, ciertamente, pero no salvaje, que es muy difícil –y a veces imposible– enseñar matemáticas a quien tiene un temperamento no matemático (escribo con mucha prevención la palabra 'temperamento', tan cargada de «animismo» y por lo tanto tan poco estimable para los que tenemos una concepción materialista del pensamiento), a quien no ve las matemáticas como merecedoras de su atención, de su esfuerzo y de su tiempo, a quien los objetos y los problemas que las matemáticas tratan le parecen o poco humanos o poco importantes para responder a las principales preguntas de su vida personal y social, las relativas a la justicia, la ética, el amor, el destino de la humanidad, el arte, el subconsciente, la búsqueda de la felicidad.

Si una persona muestra indiferencia hacia las matemáticas no puede verse en ello un síntoma de insensibilidad para la reflexión, o de falta de gusto por la resolución de problemas, ni un síntoma de cualquier otro «virus» del pensamiento. Uno enrojece por tener que decir estas cosas, porque uno enrojece cuando se apercibe de lo cerca que puede estar del dogmatismo. Y si una persona aborrece las matemáticas no siempre es porque se las hayan enseñado mal (suponer ese 'siempre' contiene a la vez el lado bueno del voluntarismo al que más arriba se hacía referencia, las cosas pueden arreglarse, y el lado malo, el lado redentor, no le gustan porque no nos ha tenido a nosotros de profesores).

La diversidad de temperamentos la expone desde dentro el científico David Ruelle:

⁴ HADAMARD, J., *Essai sur la Psychologie de L'Invention dans le Domaine Mathématique*, Librairie Scientifique Albert Blanchard, París, 1959.

Consideremos una partícula -por ejemplo, una molécula de helio- moviéndose en el espacio tridimensional y coloquemosla en una caja de volumen V . Entonces es posible calcular el número de estados de esa partícula que tienen una energía menor que E . El número de estados es

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{2 E}{m} \right)^{3/2} \frac{V}{h^3}$$

(h , constante de Plank; m , masa de la partícula)

Pues bien, la noción de que se pueda decir algo profundo acerca del universo físico manipulando unos pocos símbolos como h ó π parece tener algo de brujería. Como consecuencia, una fórmula como esa despierta una intensa revulsión en algunas personas, y un inmoderado entusiasmo en otras.⁵

Y la expresa desde fuera el escritor Peter Handke:

Muchas veces en mi relato he mencionado números -números de años, de kilómetros, de hombres y de cosas-, y cada vez que lo he hecho he tenido que vencer mi resistencia, como si los números fueran incompatibles con la narración.⁶

¿No sería, pues, juicioso poner las cosas patas arriba? ¿No será que lo que hay que explicarse no es la indiferencia o el rechazo de las matemáticas, sino más bien la afición por ellas? ¿Hay una disposición psicológica particular entre sus adictos?

En el mismo libro de Ruelle ya citado hay algunas incursiones en ese terreno que destilan además ese humor agrí dulce que nos hace reírnos de nosotros mismos. Por ejemplo estos párrafos sobre el desarrollo psicológico:

El talento matemático a menudo se desarrolla a una edad temprana. Esta es una observación común, a la cual el gran matemático ruso Andrei Kolmogorov añadió una curiosa sugerencia. En su opinión el desarrollo psicológico normal de una persona se detiene pre-

⁵ RUELLE, D., *Azar y Caos*, Alianza Universidad, Madrid, 1993.

⁶ HANDKE, P., *La repetición*, Alianza Editorial, Madrid, 1991.

cisamente en el momento en que el talento matemático empieza a establecerse. Según esto, Kolmogorov se atribuía a sí mismo una edad mental de doce años. Y daba sólo una edad de ocho años a su compatriota Ivan Vinogradov, que durante mucho tiempo fue un poderoso y muy temido miembro de la Academia Soviética de las Ciencias. Los ocho años del matemático Vinogradov corresponderían, según Kolmogorov, a la edad en que los niños arrancan las alas a las mariposas y atan latas viejas a las colas de los gatos.

Probablemente no sería demasiado difícil encontrar contraejemplos a la teoría de Kolmogorov, pero parece ser cierta con notable frecuencia. Me viene a la mente el caso extremo de un colega: su edad mental debe de ser de unos seis años, y esto le crea algunos problemas prácticos, por ejemplo cuando tiene que viajar solo. Este colega funciona relativamente bien como matemático, pero no creo que pudiera sobrevivir en la bastante más agresiva comunidad de los físicos.

O este «retrato» de Gödel:

Cuando lo vi en el Institute for Advanced Study en Princeton hacia 1970, vi un hombre pequeño, amarillento y demacrado, que llevaba tapones de algodón en los oídos. Esta es una anécdota típica que oí acerca de él: a un profesor visitante se le permitió usar el despacho de Gödel mientras que éste estaba ausente de Princeton. Al marcharse, dicho profesor dejó sobre la mesa una nota de agradecimiento, diciendo que sentía no haber visto a Gödel, y expresando la esperanza de tener la ocasión de llegar a conocerle más íntimamente en otra ocasión. Algún tiempo después recibió una carta de Gödel. La carta contenía la nota que él había dejado, en la que Gödel había subrayado la frase *Espero tener la oportunidad de conocerle a usted más íntimamente en otra ocasión*, y añadido a lápiz *¿Qué quiere usted decir exactamente?*

El «¿Qué quiere usted decir exactamente?» que obsesiona e ilumina a los matemáticos, es para otras muchas personas algo neurótico, maniático, agresivo y deshumanizado (la dicotomía ciencias/humanidades se mantiene impasible en nuestra cultura).

A propósito, la compañía de Gödel nos ayudará a reconocer otro de los disfraces bajo los que se esconden los problemas de la educación matemá-

tica. Acostumbrados como estamos a la *producción de verdades* que es la razón de ser de las matemáticas, es poco menos que inevitable que busquemos desesperadamente la producción de verdades de la enseñanza. Creo que puede rastrearse ahí la explicación de que siempre los profesores de matemáticas, como colectividad, hayan ido en vanguardia en el atrevimiento y en la contundencia de sus propuestas.

Tal deseo de producción de verdades en la enseñanza se encuentra, sin embargo, permanentemente con un obstáculo: la confusión en la que incurrimos al tomar la metaenseñanza por la enseñanza. Esta confusión debería ser, no obstante, evidente para nosotros, porque el teorema de Gödel nos tendría que haber abierto los ojos sobre la existencia de una escala de las reflexiones. El teorema de Gödel mira desde un sistema B (desde el sistema de la teoría de conjuntos) otro sistema A (el de la axiomática de los números naturales) y demuestra desde B, *desde el exterior* de A, cosas acerca del sistema A que son inaccesibles *desde el interior* de A.

La analogía con el teorema de Gödel que nos concierne ahora puede que no sea habitual, pero confío en que no sea descabellada. Desde el exterior —la metaenseñanza— se observan «verdades» acerca del interior —la enseñanza—. Pero esas no son verdades en el interior.

Desde el exterior puede verse que podríamos enseñar mucho mejor de lo que enseñamos; estamos en condiciones para ello. Pero luego, en el interior, somos incapaces de hacerlo.

Pongamos un ejemplo de entre la multitud de ellos. Sabemos sobre las *dificultades del concepto* de vector. Sabemos sobre las *dificultades de la enseñanza* del concepto de vector; tenemos argumentos razonables sobre *cómo* deberían superarse todas o casi todas esas dificultades. Sin embargo, no conseguimos avanzar en la enseñanza propiamente dicha, en la *enseñanza en acto*, del concepto de vector.

¿Por qué ocurre esto?

Porque siendo los objetos de la metaenseñanza —los objetos sobre los que interviene— los conceptos y los métodos; el qué y el cómo; y siendo

los objetos de la enseñanza –los objetos sobre los que la enseñanza opera su intervención– los estudiantes, las más de las veces el anabolismo de ambos tipos de objetos no se produce, y se queda en una frustrante yuxtaposición inorgánica.

No estoy negando cerrilmente la utilidad de la investigación didáctica; esa investigación es no sólo atrayente sino necesaria. Y sus resultados pueden probablemente resistir numerosos tests (hechos en condiciones ideales). Para la celebración de los últimos Juegos Olímpicos de invierno en Noruega se han hecho enormes esfuerzos –en aplicaciones tecnológicas, en dinero y en apelaciones a la conciencia cívica– por conseguir la perfección ecológica, evitando todo tipo de daños en el hábitat, utilizando energía limpia, reciclando al cien por cien los desechos. Mientras tanto, en la ciudad en la que vivo, lejos de Noruega, la contaminación producida por basuras y ruidos, industrias y personas, va en aumento. (Hace pocas semanas una avería en una estación depuradora de aguas causaba que se vertiesen al mar 200 millones de litros diarios de agua podrida.)

No parece sino que sólo se puede conseguir la perfección ecológica en pequeñas zonas –preferentemente ricas y hacia el norte– pero no en la globalidad del planeta. Igual pasa en nuestros avances en la teoría de la enseñanza. Con los alumnos adecuados, la tecnología disponible, el dinero necesario y una felizmente amplia pluralidad metodológica, se puede enseñar matemáticas hoy muchísimo mejor que hace cuarenta años. Pero esas condiciones sólo se cumplen en pequeños nichos económica y culturalmente delimitados y no, desde luego, en el vastísimo, desmembrado y erosionado mundo de la enseñanza pública primaria o secundaria.

2.3.3. *Tiempos modernos*

La propuesta más vigorosa y original que acompaña a la jerarquía A del momento 2 ha sido agudamente resumida en estas pocas palabras: la tarea de los alumnos es aprenderse las matemáticas, la tarea de los profesores es aprenderse los alumnos.

Pero esto último es mucho pedir; ¿aprendernos todos los alumnos?, ¿aprendernos los alumnos de una generación?, ¿como asunto experimental?, ¿como un sistema hipotético deductivo?, ¿cuánta estabilidad tienen en este caso las hipótesis?

Y hay otro género de preguntas sobre cuyas respuestas avanzamos mucho menos de lo necesario. Supongamos que me limito a mis alumnos de este curso: ¿qué saben ya?, ¿qué pueden aprender?, ¿qué quieren aprender?, ¿cuál es su capacidad para la creación de imágenes mentales?, ¿en qué grado están habituados a seguir «desde fuera» sus cálculos, su álgebra, sus ideas?, ¿cuál es su capacidad de memoria a corto plazo?, o dicho de otra manera, ¿de cuántas cosas pueden ser conscientes «a la vez»? ¿cuántas proposiciones —hechos, hipótesis—, cuántas preguntas, cuántos objetivos son capaces de mantener ligados en su memoria a corto plazo, es decir durante el tiempo de una reflexión?, ¿cuál es su línea de demarcación —si es que la han marcado— entre lo científico y lo cotidiano?, en particular, ¿cómo perciben las matemáticas?, ¿qué creen que éstas son? (por ejemplo, es muy dudoso que se pueda explicar con eficiencia a la mayoría de los estudiantes de 16 o 17 años en qué consiste, para qué sirve la geometría analítica); ¿de qué maneras se puede poner a pensar a quien no se ha puesto a pensar?

Si no se puede enseñar matemáticas a todos, uno tendría que preguntarse: *Este estudiante ¿será alguien a quien le gustan o llegarán a gustar las matemáticas o alguien que en el fondo las aborrecerá?* Y esta es también una pregunta peligrosa, porque puede uno responderla con un exceso de precipitación; esto es, desistir de intentarlo con resolución. Y desistir significaría aceptar en la enseñanza lo que es la regla en la sociedad actual: aceptar como irremediable la sima en la que se amontonan los que no saben ascender, los que no pueden competir, los que no aprenden las reglas del juego, los que están al margen.

Porque los poderes sociales envían aquí dos mensajes que si bien no llegan a ser lógicamente contradictorios son socialmente explosivos: enseñanza para todos, pero no esperanza para todos. Y de los profesores —en particular de los que son padres o madres— salen también dos mensajes que

se llevan a la greña: los adolescentes de ahora parecen saber más cosas en general que los de antes, parecen ser más aptos para la supervivencia en un mundo tecnificado, superpoblado de información y que favorece el individualismo; pero son académicamente menos competentes que «los de antes».

Con lo que se abre toda una cadena de interrogantes. ¿Qué diferencias hay entre un adolescente de hoy y uno de hace 20 años? ¿En qué benefician al aprendizaje de las matemáticas las características de individualismo, tecnificación y superabundancia de información de la sociedad contemporánea? La facilidad de relación, el desparpajo con el que, según la leyenda popular, los jóvenes manipulan y usan una de las dos máquinas tótem, el ordenador, ¿qué otras facilidades lleva aparejadas?; por ejemplo, ¿un mayor sentido algorítmico?, ¿un más afinado sentido sintáctico?, ¿una pulsión conceptual más articulada?, ¿una verbalización más consistente y precisa?

Es casi increíble que cuando todo parecía conducir a respuestas positivas algo haya sido mal analizado o mal previsto o mal intuido, porque ¿no se siente uno inclinado ahora a responder a cada una de las cuatro últimas preguntas con un 'no' cuando se piensa en la *generalidad* de los adolescentes?

¿Y el otro gran tótem, la televisión? ¿Qué podemos aprovechar de su lenguaje (no hablo de su técnica, hablo de su lenguaje)? ¿Puede pensarse que ha introducido un nuevo *estilo* de enseñanza? ¿Qué incidencia psicológica benefactora con relación al aprendizaje de las matemáticas puede ejercer sobre nuestros estudiantes?

Cinco rasgos del lenguaje de la televisión afectan negativamente a nuestra concepción de la enseñanza:

- *La fragmentación.* Selección disjunta de lo que va a decirse. Interrupción del discurso o la historia principal por anuncios, avisos, propaganda. Reiteración de los momentos «más importantes»; repetición de momentos elegidos a posteriori, resúmenes y resúmenes de resúmenes, hasta llegar a puros titulares repetidos varias

veces (como aquel sargento que tenía el secreto de la eficacia para hablar a sus soldados: «primero les digo lo que les voy a decir, luego se lo digo, y después les digo lo que les he dicho»).

- *El camuflaje de la comprensión* mediante misiles de información.
- *La duración*. Siempre con prisas porque el tiempo es dinero.
- *La imposibilidad de discusión*. La dependencia inerte del espectador ante las opiniones ajenas, sin que el que ve y oye desde fuera pueda meter baza. No caben más que el asentimiento o la negación mudos. Al disentimiento sólo puede seguir el cambio de canal o la desconexión, pero no la réplica.
- *El alejamiento de la estructura problema-desenlace*. «Desde que el hombre narra ha estado sujeto a la estructura problema-desenlace. [...] En la televisión más moderna, la lógica discurre por la adecuación de un color de plano al siguiente, por la composición de un plano adecuada al ritmo de la música que lo sustenta para pasar a la siguiente. [...] Las imágenes son huérfanas de sus referentes, y solteras se aparean a las siguiente siguiendo una lógica no narrativa, no literaria, sino televisiva, audiovisual».⁷

3. ¿EL MOMENTO DE LA CLARIDAD?

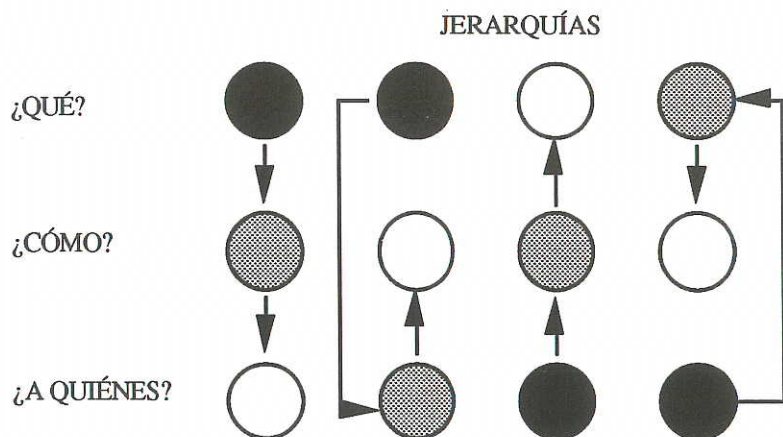
Predecir es difícil, especialmente el futuro

(Niels Bohr)

Ni que decir tiene que la autocrítica –por mucha carga religiosa o política que tenga el término– ni es aquí una confesión ni su consecuencia moral es volver al dogma del que uno se había salido. Es sólo una reflexión profesional a la que una profesión que nunca acaba de resolver sus problemas obliga.

⁷ ROMERO, P., «De Brunelleschi a la M.T.V.», *El País*; 20-11-93.

Así que el momento 4 no coincidirá con el 2, ni desde luego tampoco con el 1. Tal vez puedan anunciarse dos de sus rasgos generales; uno, el de no tener una jerarquía estable; otro, el de que en ningún caso el centro de gravedad sea el método. La combinatoria de posibilidades lo dejaría, pues, de este modo:



Los problemas, efectivamente, regresan, pero no lo hacen para presentarse exactamente como lo hicieron la última vez. No hay círculo vicioso, porque nada es exactamente como la última vez. Ni las matemáticas, ni las herramientas, ni los estudiantes, ni los profesores, ni el hábitat.

Una de las principales causas por las que la enseñanza institucionalizada, la de las matemáticas en particular, no termina de resolver sus problemas es porque está sometida a fluctuaciones sociales y económicas profundas. De manera que en cierto momento se hacen análisis y se emiten hipótesis que vienen influidos por el estado socioeconómico global de ese momento, y en otro se hacen análisis muy diferentes porque el estado general es muy diferente.

Seguramente no hay visión que escape a ese destino, que no sea hija natural o política de lo que pasa «ahora» fuera de la educación y de lo que en otros momentos pasó también fuera de la educación.

Imitando a Bohr puede decirse que analizar es difícil, especialmente el presente. Es tanto lo que está pasando (probablemente más que nunca) que nadie sabe bien lo que está pasando. Sin embargo, hay que intentar saberlo. En el reducido espacio de la enseñanza; mejor dicho, en el aún más reducido espacio de ella que soy capaz de percibir, tengo que correr el riesgo de pronosticar el presente, de decirme a mí mismo qué es lo que veo. Quizás esté afectado de daltonismo, pero así lo veo.

Por un lado ha aumentado el número de estímulos, la cantidad y la diversidad de información y de imágenes; pero ese aumento no repercute en el entorno de una manera perceptiblemente favorable al aprendizaje de las matemáticas por la población en general. Lo que parece, más bien, es que tanto la proporción de personas que obtienen provecho (las que gustan de las matemáticas, que, eso sí, pueden aprender más y es posible que más deprisa que sus homónimas predecesoras) como la proporción de aquellas a las que no les gustan o no pueden con ellas, ambas proporciones se mantienen estables.

Y por otro lado, está cristalizando la conjunción entre el «sálvese quien pueda» de la peor vertiente del liberalismo, y la impúdica propaganda oficial y privada interesada en halagar a los jóvenes con una «cultura» efímera o instantánea porque no sabe ofrecerles algo que sea más duradero y denso.

Oscuro panorama que nos abre sin embargo una posibilidad que hasta hace poco no creíamos que habría que considerar, la que nos recuerda Henry James:

El mejor momento de todos, con mucho, para entregarse al oficio propio es cuando éste no parece valer la pena, pues en tal caso se le brinda una brillante oportunidad, la de resistir la más dura de las pruebas: la prueba de que uno lo juzgue odioso. Esforzarse al máximo

cuando de ello se puede sacar lo mínimo, es lo más cercano posible al espíritu de la creación.⁸

El culto a lo instantáneo, la palabrería vestida de retórica, la confusión –intencionada o no intencionada– y una ética de la acción según la cual la reflexión no es más que un obstáculo que se interpone ante el curso inevitable de los hechos, todo ello junto es un alud que se nos ha venido encima, y que es consecuencia de fuerzas extrañas a la enseñanza propiamente dicha. Es muy probable que el contraempuje desde dentro tenga poco efecto, pero como dice James es una brillante oportunidad.

De las direcciones en las que puede ejercerse ese empuje para conservar el oxígeno, hay por lo menos una que vale la pena y que está en nuestras manos: la seriedad de los argumentos acerca de lo que se puede y lo que no se puede conseguir cuando se enseña, la severidad de la duda, la disciplina de la palabra y de la imagen; delimitar en lo oscuro el campo de la claridad, y hacerlo claramente.

En el diccionario de la Real Academia las tres acepciones siguientes del término CLARIDAD expresan consecutivamente tres perspectivas diferentes,

- la del emisor, 1 // «efecto que causa la luz iluminando un espacio, de modo que se distinga lo que hay en él»;
- la del receptor, 2 // «distinción con la que por medio de los sentidos, y más especialmente de la vista y del oído, percibimos las sensaciones, y por medio de la inteligencia, las ideas»;
- la de la cosa misma, 3 // «una de las cuatro dotes de los cuerpos gloriosos, que consiste en el resplandor y luz que en sí tienen».

Yendo al adjetivo CLARO, estas tres acepciones se corresponden con

- 1' // «bañado de luz. Aplícase a la persona que se expresa con claridad»;
- 2' // «perspicaz, agudo»;
- 3' // «inteligible, fácil de comprender».

⁸ JAMES, H., *La musa trágica*, Seix Barral, Barcelona, 1993.

El hecho de que esta diversidad del léxico,

- explicar con claridad // Cómo,
- entender con claridad // Quiénes,
- ser claro en sí // Qué,

encaje como una parte del problema de los tres cuerpos es estimulante porque anima a pensar que la reflexión sobre la claridad nos situará siempre en el sistema dinámico central. Anima a empezar un cuaderno personal de anotaciones sobre el lugar, las condiciones y las fronteras de la claridad, sin temor de que algunas de esas anotaciones sean muy simples, incluso evidentes, con tal de que lleven a decisiones educativas en la práctica.

Creo que la primera de esas evidencias es que las explicaciones deben detenerse en algún sitio. Todo el mundo nos dice, y desde luego nosotros mismos, que los profesores debemos tener paciencia. De acuerdo; pero no una paciencia que nos enloquezca, la paciencia en forma de círculo vicioso.

¿Por qué en tantas ocasiones una explicación que me parece clara hasta el punto de que no veo manera de aportar más claridad tropieza con la incompreensión de tales o cuales estudiantes? Pues muchas veces porque no hay más posibilidad de explicación, ninguna luz nueva que yo pueda proyectar. En tal caso, intentar ir más allá no es una explicación, es una usurpación de la obligación intelectual que el interlocutor tiene de aceptar su responsabilidad, ya que los límites de esa explicación están ahora en el receptor de ella.

En una clase se ha propuesto hallar la probabilidad de obtener trío de ases al recibir cinco cartas en una partida de póquer sin descartes. Una estudiante te interroga sobre si esa probabilidad es o no es la misma si la jugadora es la primera o es la tercera en recibir sus cinco cartas, y si la probabilidad es la misma repartiendo las cartas de una en una a cada jugador o repartiendo primero tres y luego dos. Respondes que la probabilidad es la misma si las cartas están barajadas de modo que presumiblemente están en el mazo en un orden aleatorio. La respuesta no la convence. Tu opinión, y se la dices, es que ya que comprende bien lo que es una disposición aleato-

ría y ya que tiene los conceptos suficientes para hacer los cálculos oportunos, la pregunta queda en sus manos; porque tú no podrías más que terminar por decirle: «¿pero no lo ves?».

Con su característica perseverancia, Wittgenstein nos dice que los métodos de demostración típicos de las matemáticas no son análogos a los que se utilizan en la lógica. Una demostración lógica consiste en una serie de proposiciones cuya intención es establecer la verdad de una conclusión. Lo que Wittgenstein quiere demostrar es que, en matemáticas, una demostración consiste más bien en una serie de imágenes cuya intención es establecer la utilidad de una técnica.

Por ejemplo, no ve ninguna razón por lo que esta imagen

o	o	o	o	o
o	o	o	o	o
o	o	o	o	o
o	o	o	o	o

no pueda verse como una prueba de la ley conmutativa de la multiplicación. Ya que una persona podría, mirando esa imagen primero horizontalmente y luego verticalmente, ver que 5×4 es igual a 4×5 y entonces utilizar ese principio en todos los demás casos. Si esa persona es incapaz de «ver» la relación entre ambos puntos de vista, la demostración no la convencerá de nada.⁹

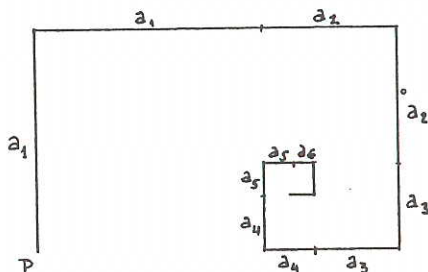
Que la televisión use las imágenes como le plazca; pero la enseñanza de las matemáticas tendría que considerar cómo se usan las imágenes en matemáticas. No sabemos lo que Wittgenstein habría pensado del uso de las imágenes que nos entregan los ordenadores, pero es muy probable que se hubiese reafirmado en su distinción entre lógica y matemáticas. En cualquier caso, sobre la relación demostrativa entre texto, palabra e imagen nos queda aún mucho por averiguar y es un desafiante problema didáctico abierto. ¿Se me permite un solo ejemplo?

⁹ WITTGENSTEIN, L., *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*, Alianza Universal, Madrid, 1987.

Las espirales no acaban nunca, ni hacia el exterior ni hacia el interior. La longitud de cualquier espiral es infinita. Pero si nos detenemos en un punto de ella y vamos hacia el interior tenemos un recorrido de infinita «duración»; ¿será también de infinita longitud?

Esta es la explicación textual habitual (para espirales poligonales):

Espiral áurea



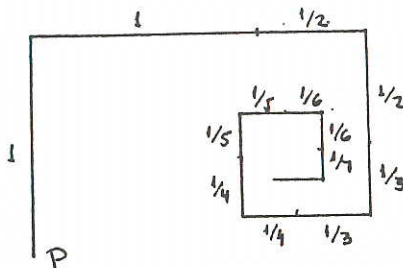
longitud desde P hacia dentro:

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 2\left(1 + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \dots\right) = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi}} =$$

$$= 2 \frac{\Phi}{\Phi - 1} = \frac{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1} = 3 + \sqrt{5}$$

longitud finita.

Espiral armónica



longitud desde P hacia dentro:

$$2 (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots)$$

longitud infinita.

Aquí, para suscitar la comprensión de que espirales muy parecidas en su modo de ser generadas difieren radicalmente en que una es de longitud finita y otra de longitud infinita hay que pagar un canon estrictamente matemático: la demostración de que la serie armónica $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ es divergente.

Y ésta es una explicación gráfica:

Con el programa

SEA ESP :L :E

AV :L

DE 90

AV :L

LOCAL "R

HAZ "R LC

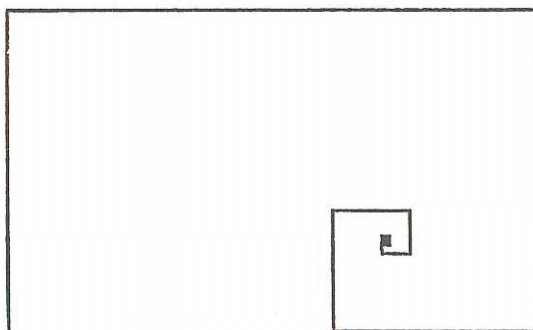
ESP :L * :E :E

FIN

La gráfica de ESP 80 0.62

(la espiral áurea) que da

un ordenador es



Con el programa

SEA ESP.AR :L :N

AV :L/:N

DE 90

AV :L/:N

LOCAL "R

HAZ "R LC

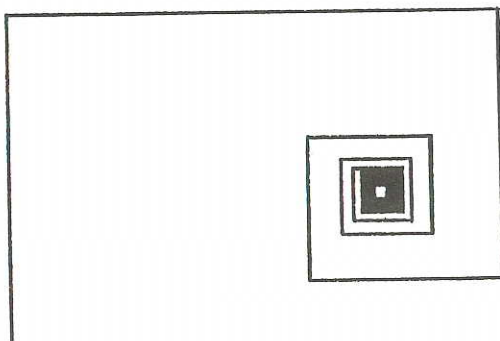
ESP.AR :L :N+1

FIN

la gráfica de ESP.AR 80 1

(la espiral armónica) que da

el mismo ordenador



¿Qué nos dicen las gráficas acerca de la convergencia? No nos lo dicen con unos cálculos, nos lo dicen con unas imágenes: mirando a la pantalla se observa que el dibujo de la espiral áurea «fija» a la 10ª iteración: converge gráficamente; mientras que la idea de la divergencia de la espiral armónica se obtiene de que la figura todavía no se «ha fijado» tras 60 iteraciones.

¿Qué grado de claridad se consigue con un método y con el otro? ¿No es razonable pensar que ambos tipos de claridad se complementan? ¿No habrá que dejar la decisión última al estudiante?

La paciencia no consiste en repetir hasta que el otro comprenda, consiste más bien en buscar incansablemente las fuentes de luz que puedan arrojar el máximo posible de claridad, las imágenes más esclarecedoras, las relaciones más pertinentes y sobresalientes. Pero las imágenes debe apropiárselas el receptor, y es éste quien debe «ver» las relaciones.

De modo que, por un lado, la máxima claridad alcanzable compete a los profesores; y por otro lado, la perspicacia y la agudeza competen a los estudiantes. Dicho de otra manera, la explicación debe tener lugar a causa de conflicto o de oscuridad latente y viva, por así decirlo, pero no de una oscuridad que sea refractaria a la luz.

· Seguramente los profesores nos sentiríamos más confortables y con una mayor tranquilidad de espíritu si nos dedicásemos con aplicación a deslindar aquellas dos competencias, para así saber cuándo podemos hacer algo más y cuándo no.

Personalmente, diré con gusto que a mí me está siendo de mucha utilidad revisar cuándo, como en el caso de la probabilidad al que antes hice referencia, ya he llegado al límite, y cuándo (en un sorprendente número de ocasiones) me he detenido equivocadamente en explicaciones menos claras de lo que, con un poco más de búsqueda y de estudio, está a mi alcance conseguir.

En cuanto a la claridad de los objetos de enseñanza, la claridad del *qué* en sí mismo, uno se siente tentado a encabezar sus observaciones categóricamente: ninguna idea, concepto, procedimiento o relación de las matemáticas son claros en sí mismos. Pero como las proposiciones negativas siempre contienen un átomo de destrucción en ellas, es más prudente recomponerlas en proposiciones afirmativas que invitan a estudiar las cosas más en detalle: los límites de la claridad del *qué* son seguramente los más objetivos, los que mejor muestran sus rasgos frontales, rasgos que ninguna cosmética didáctica puede alterar por completo. Que las matemáticas son difíciles de enseñar y difíciles de aprender no es una cosa provisional que pueda eliminarse con mejores métodos ni mayor voluntad ni con un decreto de mínimos. No obstante, conocer con más precisión la raíz de las dificultades específicas (una línea de investigación afortunadamente viva) no puede dejar de influir en el cómo y en el a quiénes.

Me decía hace poco una amiga que varios de los estudiantes de tercer curso a los que enseña en su facultad de matemáticas no han alcanzado aún la comprensión completa del significado de los conceptos de condición ne-

cesaria o suficiente en su exigente distinción en la teoría y la práctica de las matemáticas. En la enseñanza secundaria situaciones como esa o en general las referentes a qué es lo que se está afirmando exactamente cuando se afirma algo son muchísimas y recurrentes. No pocas de las dificultades del tratamiento de los objetos matemáticos radican para los estudiantes en la imperfecta comprensión y utilización de las finas características del lenguaje natural con el que uno ha de expresarse en matemáticas. Cuando los profesores hablan y se esfuerzan en ser precisos y a la vez claros, es muy dudoso que la mayoría de los estudiantes estén de acuerdo en la necesidad simultánea de ambos requisitos. De hecho, al menos a mí suele ocurrirme, la profesora o el profesor, en cuanto se percatan de la incomprensión, se suelen inclinar por hacerse más claros a costa de la precisión, lo cual tiene muchas veces como consecuencia un falseamiento de la claridad, un truco sobre ella. (No estoy aquí identificando precisión con rigor exquisito, sino precisión con decir lo que uno quiere decir, ni más ni menos.) Cada vez que hacemos eso nos alejamos de las matemáticas, esa es la verdad. Puede que lo hagamos justificándolo por la necesidad de pasar un examen o por no llevar la clase a un punto muerto, o por no aturdir a los estudiantes, o por no asustarles. Así tal vez nos acerquemos a ellos pero nos alejamos de las matemáticas.

Si no se tomase como una proposición dogmática, sino como un hábito cauteloso, habría que devolver vigencia al famoso imperativo del filósofo: de lo que no se puede hablar, lo mejor es callarse.

La irreductibilidad del qué de las matemáticas está, sin embargo, sobre todo en que se niega a ser trivial, por ser múltiple; se niega a ser encapsulado, por su inmensa capacidad de expansión; se niega al contacto esporádico, por no ser superficial. Qué le vamos a hacer.

La claridad es un asunto humano y entre humanos, que siendo deseable no siempre es alcanzable.

Pero un esfuerzo por la claridad es siempre un esfuerzo contra la inmovilidad, la sinrazón y la charlatanería; y que no se lleva bien ni con la complacencia del éxito inmediato ni con los atajos de la apariencia.

Cualquier atentado contra ella, cualquier menosprecio oportunista, cualquier olvido de su condición de valor intelectual y ético, son agravios para la educación y flacos favores para los estudiantes. Y más, precisamente ahora. ¿No os parece?